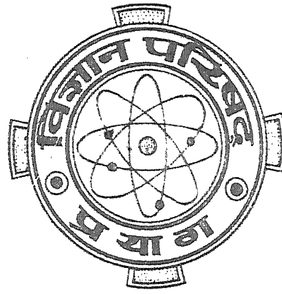
ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 41 January 1998 No. 1



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

विषय-सूची

Vol. 41 January 1998 No. 1

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 1, January, 1998.

स्पेक्ट्रॉस्कोप की आँख से*

(अवनि से अन्तरिक्ष के परे तक)

देवेन्द्र शर्मा

पूर्व कुलपति, गोरखपुर और इन्दौर विश्वविद्यालय,
सी-1038, रामसागर मिश्रनगर, लखनऊ-16 (उ० प्र०)

मित्रो !

मुझे आधी शताब्दी से ऊपर का वह दिन याद आता है जब काशी हिन्दू विश्वविद्यालय के भौतिकी विभाग की स्पेक्ट्रॉस्कोपी प्रयोगशाला में प्रोफेसर असुन्दी ने अपने सहकर्मियों से परिचय कराया। इस अनौपचारिक मिलन के बाद जब भी मेरा वाराणसी आना होता था या प्रोफेसर असुन्दी के अतिरिक्त उस अत्यन्त सरल, आडम्बररहित मानव, जो मेरे अग्रज सदृश्य थे और जो वहाँ 'मास्टर साब' के सम्बोधन से सबके प्रिय थे उन नन्दलाल जी से अवश्य मिलना होता था । जब तक मैं इलाहाबाद रहा और जब भी प्रोफेसर असुन्दी वहाँ आते डॉ० सिंह प्रायः उनके साथ आते और दोनों का हमारे यहाँ प्रवास होता । चाहे काशी हो या प्रयाग, दोनों का प्रातः सूर्योदय के पूर्व गंगा-स्नान को जाना उनकी दिनचर्या का अभिन्न अंग था जिसमें ऋतु की दृढ़ता भी बाधा नहीं डाल सकती थी। हमारे बीच स्पेक्ट्रॉस्कोपी, अनुसन्धान और शिक्षा के विभिन्न पहलुओं के अतिरिक्त देश, काल तथा सामाजिक समस्याओं पर रोचक चर्चा होती थी। उन्हीं दिनों पता लगा कि डॉ० नन्दलाल जी ने प्रो० असुन्दी को रामचरित मानस में रुचि जगाई जिसको न केवल उन्होंने पढ़ा, समझा वरन् वे इसको साहित्य की उत्कृष्टतम कृति भी मानने लगे थे ।

प्रो० असुन्दी के सेवानिवृत होने के पश्चात् डॉ० सिंह ने स्पेक्ट्रॉस्कोपी विभाग की बागडोर सँभाली और इधर मैं प्रयाग से गोरखपुर आ गया । अपने विभाग के शैशव काल से लेकर उसके वयस्क होने तक वे उससे जुड़े रहे तथा वहाँ से निवृत्त होने के बाद भी परिवार के पितामह के रूप में सब का मार्गदर्शन करते रहे । जिस शिशु को प्रो० असुन्दी ने जन्म दिया था उसको देश की सर्वोकृष्ट प्रयोगशाला बनाने में प्रो० नन्दलाल सिंह के योगदान को नकारा नहीं जा सकता । इसके अतिरिक्त विश्वविद्यालय के भौतिकी की हिन्दी सेल के निदेशक के रूप में भौतिकी के विभिन्न अंगों पर स्नातक

* 1 अगस्त 1997 को बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय में आयोजित प्रो० नन्दलाल सिंह स्मृति व्याख्यान

स्तर की पुस्तकों का सम्पादन कर उन्होंने विज्ञान को सुगम तथा सर्व-सुलभ बनाकर समाज और देश की सेवा की है ।

किसी भी व्यक्ति का सही मूल्यांकन उसके मानवोचित्त गुणों से ही किया जा सकता है । इस दृष्टि से मुझे कुछ प्रसंग याद आते हैं । एक वंचक ने अपने आपको आर्थिक संकट में बताकर उनसे सहायता प्राप्त कर ली । सन् 1942 के 'भारत छोड़ो' आन्दोलन के दौरान सिंह साहब के यहाँ किसी आन्दोलनकारी के छिपे रहने के सन्देह में पुलिस ने तलाशी ली । वहाँ कुछ न मिलने पर दल के अंग्रेज मुखिया ने खेद व्यक्त करते हुए क्षमा माँग कर विदा ली । डॉ० सिंह ने अफ़सर की कर्तव्य-निष्ठा और उसकी नम्रता की सराहना की । उनके मन में कोई कटुता नहीं थी । जिन दिनों प्रोफेसर सिंह लखनऊ में अपने पुत्र ब्रिगेडियर के० पी० एन० सिंह के साथ रह रहे थे एक दिन मेरी उनसे फ़ोन पर बात हुई । वे बड़े संयत आत्मीयता भरे ढंग से बात कर रहे थे । यह तो बाद में पता लगा कि उस समय उनकी जीवनसंगिनी मरणासन्न अवस्था में चल रही थीं । वैसे भी उनको मैंने कभी अधीर या कुपित नहीं देखा—

'दुःखेष्वनुद्विग्नमनाः सुखेषु विगतस्पृहः' ।

ऐसे धीर-गम्भीर प्रो० सिंह यद्यपि हमारे बीच नहीं रहे। आशा है उनकी आत्मा आने वाली पीढ़ियों का पथ-प्रदर्शन करती रहेगी ।

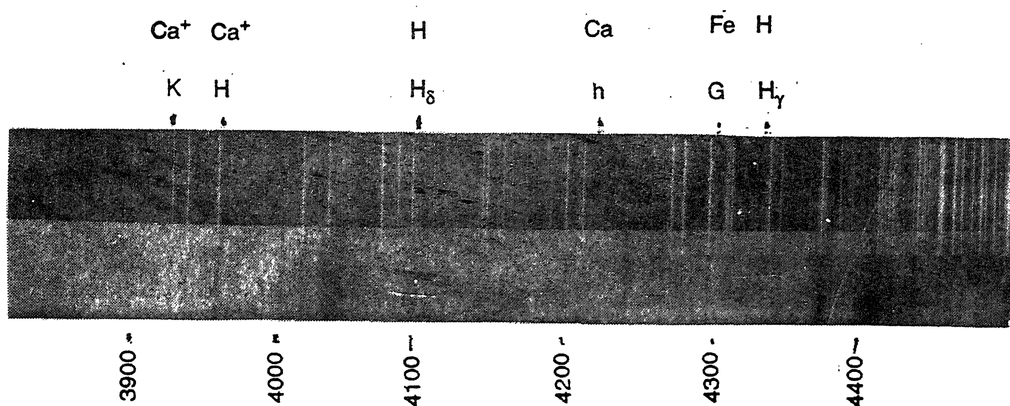
दिव्य चक्षु, ज्ञान चक्षु

वर्षा ऋतु के उपरान्त महानगरों के कृत्रिम प्रकाश और धूल भरे वातावरण से दूर रात के काले आकाश में असंख्य तारे दिखाई पड़ते हैं, कुछ अधिक चमकीले, कुछ कम किसी का रंग लालिमा लिए हुए तो कोई पीलापन या नीली श्वेत छवि के साथ, इनके अतिरिक्त दूध की फुहार जैसी आकाश गंगा। उस शान्त वातावरण में मानो ये सब हमसे मिलने और अपनी सुनाने और हमारी सुनने को आतुर हों । पर कैसे ? सृष्टि और स्रष्टा को देखने के लिए भगवद्गीता (11-8) में श्री कृष्ण ने कहा है :

न तु मां शक्यसे द्रष्टुमनेनैव स्वचक्षुषा,
दिव्यं ददामि ते चक्षुः पश्य में योगमैश्वरम्।।

प्रश्न यह उठता है कि भौतिक स्तर पर 'दिव्य चक्षु' क्या हैं ? इस सम्बन्ध में लगभग डेढ़ शताब्दी पूर्व का दार्शनिक औगस्टे कोम्ते का यह कथन याद आता है कि 'कुछ चीजें ऐसी हैं जिनके बारे में मानव संतति सदा अनभिज्ञ रहेगी। उदाहरणार्थ, आकाशीय पिण्डों की रासायनिक संरचना ।' इस कथन के अल्प काल उपरान्त ही बुन्सन् और कर्चहॉफ ने स्पेक्ट्रॉस्कोप की सहायता से प्रयोगशाला में यह दर्शाया कि भिन्न-भिन्न पदार्थों का स्पेक्ट्रम भिन्न होता है जिसके द्वारा उन पदार्थों को उसी प्रकार पहचाना जा सकता है जिस प्रकार हमारे आपके उँगलियों या अँगूठे के छापों से हम और आपको। प्रत्येक तत्व के परमाणुओं के स्पेक्ट्रम में सरल रेखाएँ होती हैं । अणुओं का स्पेक्ट्रम अपेक्षाकृत अधिक

जटिल होता है । इतना ही नहीं, इस विधि से उन्नीसवीं शताब्दी के सातवें दशक से लेकर इस शताब्दी के प्रथम दशक तक पृथ्वी पर तेरह नए तत्व खोजे गए । इसी क्रम में और प्रकाश से प्राप्त स्पेक्ट्रम की रेखाओं के अवलोकन से लोकियर ने हीलियम गैस की खोज की (1868) । सैद्धान्तिक दृष्टि से आकाशीय पिण्डों का स्पेक्ट्रम प्राप्त करना सरल है । पिण्ड से आगत प्रकाश को दूरदर्शी द्वारा स्पेक्ट्रोमीटर की स्लिट पर केन्द्रित स्पेक्ट्रम का चित्र फ़ोटोग्राफ़ किया जा सकता है । चित्र 1 में सौर स्पेक्ट्रम* दर्शाया गया है । ऊपर के भाग में जो सौर स्पेक्ट्रम है, हाइड्रोजन, कैल्सियम तथा उसके आयन और लोहे की अवशोषण रेखाएं चिन्हित हैं । नीचे के भाग में तुलना के लिए साथ ही लिया हुआ प्रयोगशाला के लौह आर्क का उत्सर्जन-स्पेक्ट्रम है ।



चित्र 1. सौर स्पेक्ट्रम

दो मीटर की अवतल ग्रेटिंग पर लिया गया सौर स्पेक्ट्रम । Ca^+ की H और K रेखाओं के अतिरिक्त हाइड्रोजन की बराबर श्रेणी की H_γ और H_δ तथा Ca की h रेखा देखी जा सकती है । नीचे के भाग में तुलना के लिए प्रयोगशाला के लौह आर्क की उत्सर्जन रेखाएं हैं (गोरखपुर विश्वविद्यालय के भौतिकी विभाग के सौजन्य से) ।

पृथ्वी पर प्रयोगशाला में किए गए प्रयोगों, अन्तरिक्ष में विद्यमान पिण्डों और बीच की गैसों के अध्ययन परस्पर एक दूसरे के ज्ञान को बढ़ाने में योगदान कर रहे हैं तथा करते रहेंगे । जहाँ दार्शनिक और स्पेक्ट्रॉस्कोप से हम विश्व के पदार्थों का अवलोकन करते हैं वहीं उस जानकारी की बारीकियों को समझने के लिए ज्ञान चक्षुओं की आवश्यकता है। उपनिषद् के शब्दों में :

'पश्यन्तो ऽपि न पश्यन्ति, पश्यन्ति ज्ञान चक्षुषः' ।

---

* गोरखपुर विश्वविद्यालय के भौतिकी विभाग में लिया गया —प्रो० जय प्रकाश चतुर्वेदी के सौजन्य से

इस दिशा में शताब्दी के प्रारम्भिक वर्षों में परमाणुओं और अणुओं की संरचना सम्बन्धी प्रायोगिक अध्ययनों को सैद्धान्तिक आधार मिला जिससे अन्तरिक्ष सम्बन्धी अध्ययन न केवल वहाँ पाये जाने वाले पदार्थों, उनके रूपों का, वरन् वे उन रूपों में क्यों हैं इसका भी ज्ञान कराने में सफल हो रहे हैं। इन अध्ययनों के लिए स्पेक्ट्रम के रेडियो तरंगों से लेकर दृश्य प्रकाश के अतिरिक्त एक्स और गामा किरणों के साथ न्यूक्लीय कणों तक का महत्व है । अब तक प्राप्त ज्ञान का परिणाम इतना है कि सीमित समय में उसकी बानगी लेना भी दुष्कर है । यहाँ कतिपय सरल उदाहरण देकर स्पेक्ट्रॉस्कोप (व्यापक अर्थ में) की सहायता से विश्वदर्शन पर प्रकाश डालने का प्रयत्न किया जा रहा है ।

प्रयोगशाला के अध्ययनों और खगोल-भौतिकी स्पेक्ट्रमी अध्ययनों ने कैसे एक दूसरे के ज्ञान को परिमार्जित किया है इसके उदाहरणस्वरूप ध्रुवीय ज्योति के स्पेक्ट्रम की ऑरोल रेखाओं और नीहारिकाओं के स्पेक्ट्रम की नेबुलर रेखाओं का उल्लेख रोचक है । उनके उद्गम की जानकारी न होने के कारण उन्हें उन नए तत्वों को समझा गया जो ध्रुवों के समीप के वातावरण और नीहारिकाओं में हों । प्रयोगशाला के अध्ययनों के द्वारा ज्ञात ऊर्जा-तलों में ज्ञान की सहायता से यह पाया गया कि उपरोक्त दोनों स्रोतों से प्राप्त रेखाएँ क्रमशः ऑक्सीजन परमाणुओं (O) के ऊर्जा तलों के बीच वर्जित संक्रमणों (ऑरोरल रेखाएं) तथा ऑक्सीजन और नाइट्रोजन आयनों (O^+, O^{++} तथा N^+) के ऊर्जा तलों के बीच वर्जित संक्रमणों के कारण (नेबूलर रेखाएं) उत्पन्न होती हैं; अतः उनकी तीव्रता स्वल्प होने के कारण वे प्रयोगशाला में प्राप्त नहीं की जा सकीं । कालान्तर में उन तथा उन जैसी अन्य रेखाओं का प्रयोगों की स्थिति में उचित परिवर्तन का प्रयोगशाला में अवलोकन संभव हो सका । प्राकृतिक परिस्थितियों में स्रोत के विशाल होने के कारण इतने संक्रमण मिल जाते हैं कि क्षीण रेखाएं भी प्रकट हो जायँ।

यदि लोहे के टुकड़े को भट्टी में गर्म किया जाय तो जैसे जैसे उसका ताप बढ़ता है वह पहले लाल, फिर नारंगी से पीला होता हुआ श्वेत और नीलिमा लिए हुए श्वेत प्रकाश देने लगता है । यह प्रयोग एक सामान्य बल्ब पर लगाई वोल्टता धीरे धीरे बढ़ाकर सुगमता से किया जा सकता है । कुछ ऐसी ही स्थिति आकाश में चमकते तारों की है । उनकी सतह का ताप उनके रंग से भी आँका जा सकता है और बदलते रंग के साथ उनके स्पेक्ट्रम में भी परिवर्तन होता है । यहाँ उनके आकार आदि और वर्गीकरण की बारीकियों में न जाकर इतना ही कहा जायगा कि अपेक्षा कम ताप के गोलों (3000° से 4000° परम प्रताप) में पदार्थ अधिकतर उस रूप में होते हैं और हमको बैण्ड स्पेक्ट्रम मिलते हैं। बढ़ते ताप के साथ अणुओं का तापीय विखण्डन होने लगता है और सूर्य जैसे (लगभग 6000° पृष्ठ के परम प्रताप) तारों के स्पेक्ट्रम में N, MgH, CH आदि अनेक परमाणविक अणुओं के साथ H, He, Ca, Na आदि परमाणुओं तथा इनमें से कुछ के आयनों के स्पेक्ट्रम मिलते हैं । सतह का ताप और बढ़ने पर अणुओं का स्पेक्ट्रम समाप्त हो जाता है तथा सब पदार्थ परमाणुओं और उनके आयनों के रूप में हो जाते हैं । अत्यधिक ताप होने पर He जैसे तत्वों के आयनों तक की रेखाएँ उत्सर्जित होने लगती हैं। स्पेक्ट्रमों की विशिष्टताओं के आधार पर तारों का वर्गीकरण किया गया है जिससे उसकी भौतिक और रासायनिक संरचना को सैद्धान्तिक आधार देना संभव हो सका है । इन अध्ययनों से न केवल सुदूर पिण्डों में विद्यमान पदार्थ किस अनुपात और किस अवस्था में है इसका ज्ञान होता है वरन् इसका भी कि वे ऐसे क्यों हैं। इस दिशा में आचार्य मेघनाद साह के तापीय आयनीकरण के सिद्धान्त

से और सहायता मिली है ।

डॉप्लर प्रभाव

आकाशीय पिण्डों, अन्तरिक्ष में विद्यमान गैसों और धूलकणों के अध्ययन में यदि किसी एक प्रभाव ने सबसे अधिक योगदान दिया है तो वह है डॉप्लर प्रभाव जिसका पहले ध्वनि के क्षेत्र में उपयोग हुआ । क्योंकि ध्वनि तथा प्रकाश दोनों ही तरंग रूप दर्शाते हैं अतः प्रकाश के अध्ययन में भी यह समान रूप से महत्व रखता है । हमारी ओर आते पिण्ड से आने वाले प्रकाश के कम्पनों की संख्या प्रति सेकण्ड हमारी अपेक्षा स्थिर पिण्ड से आने वाले उसी तरंगदैर्ध्य के प्रकाश की तुलना में अधिक होगी या कहें कि तरंगों के सम्पीड़न से उनका तरंगदैर्ध्य कम हो जाएगा । इसके विपरीत हम से दूर जाते प्रकाश की तरंगों का तरंगदैर्ध्य बढ़ जाएगा । इस प्रभाव का मात्रात्मक अध्ययन खगोल विज्ञान के अनेक जटिल रहस्यों का स्पष्टीकरण करने और समझने में अपनी महत्वपूर्ण भूमिका रखता है अतः उसकी अधिक विस्तार से चर्चा उचित ही होगी । यदि हमारी अपेक्षा स्थिर पिण्ड से आने वाले प्रकाश का तरंग दैर्ध्य λ है तो हमारी ओर आने या दूर जाने वाले पिण्ड से प्राप्त उसी तरंग-दैर्ध्य के प्रकाश का हमारे लिए तरंग दैर्ध्य होगा:

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1\mp\beta}{1\pm\beta}} \qquad (1)$$

जहाँ β स्रोत के वेग v और प्रकाश वेग c का अनुपात (v/c) है । जब हम या स्रोत एक दूसरे से ऐसे वेग से आ या जा रहे हैं जो प्रकाश वेग की अपेक्षा काफी कम हैं तो यह देखा जा सकता है कि उपरोक्त समीकरण हो जाता है—

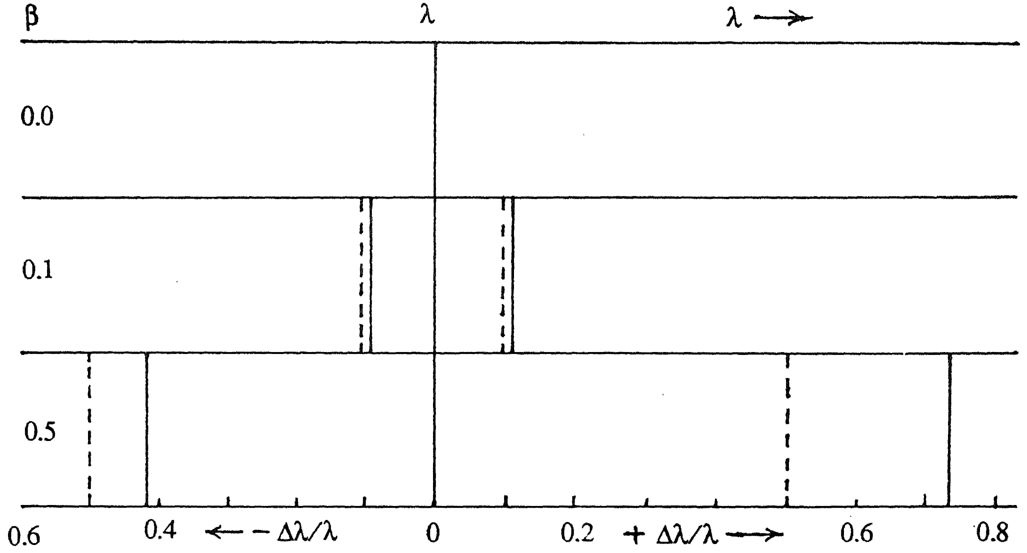
$$\lambda' = (1\mp\beta)\lambda \qquad (2)$$

और λ' और λ का अन्तर $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \mp\beta\lambda$

इन सभी समीकरणों में $\mp$ का अर्थ है कि ऊपर का चिन्ह उस स्थिति का है जब हम और पिण्ड एक दूसरे की ओर v वेग से जा रहे हैं और नीचे का चिन्ह जब हम विलग हो रहे हैं ।

चित्र 2 में β के तीन मूल्यों 0, 0.1 और 0.5 के लिए $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ का मान दिखाया गया है । बीच की रेखा $v = 0$ की है । डैश से चिन्हित रेखाएँ समीकरण (2) के आधार पर हैं और संतत स्पेक्ट्रमी रेखाएँ समीकरण (1) के आधार पर। इस चित्र से यह स्पष्ट है कि जैसे जैसे पिण्ड और हमारे बीच का सापेक्ष वेग प्रकाश वेग के शतांश से ऊपर बढ़ता है वैसे वैसे समीकरण (2) के स्थान पर समीकरण (1) के अनुसार डॉप्लर प्रभाव का मान व्यक्त करना आवश्यक हो जाता है, यानि आपेक्षिकता का सिद्धान्त अपना प्रभाव दर्शाता है । यद्यपि अधिकांश मापनों और अवलोकनों में सामान्य डॉप्लर प्रभाव पर्याप्त है, सुदूर गैलेक्सियों को हमसे दूर जाते हुए देखा गया है और उनका वेग प्रकाश वेग का 90 प्रतिशत तक पाया गया है । इन अवलोकनों ने प्रसारी विश्व की अवधारणा को गुणात्मक

और मात्रात्मक दृष्टि से पुष्टि की है । क्योंकि जो गैलेक्सी हमसे जितनी दूर है वह हम से उतने ही अधिग वेग से और दूर भाग रही है, अतः सुदूरतम गैलेक्सी की खोज ब्रह्माण्ड और उसकी उत्पत्ति की गुत्थी सुलझाने में सहायक हो सकती है । स्पेक्ट्रमी रेखाओं के डॉप्लर विस्थापन का अनुमान एक उदाहरण से लगाया जा सकता है । यदि कोई पिण्ड हमसे प्रकाश वेग के 50% वेग से दूर जाते हुए Ca^+ की H और K रेखाएँ, जो हमारी अपेक्षा स्थिर स्रोत क दृश्य स्पेक्ट्रम के बैंगनी छोर पर हैं, उत्सर्जित करता है तो वे हमको स्पेक्ट्रम के दूसरे अर्थात् लोहित छोर पर प्राप्त होंगी ।

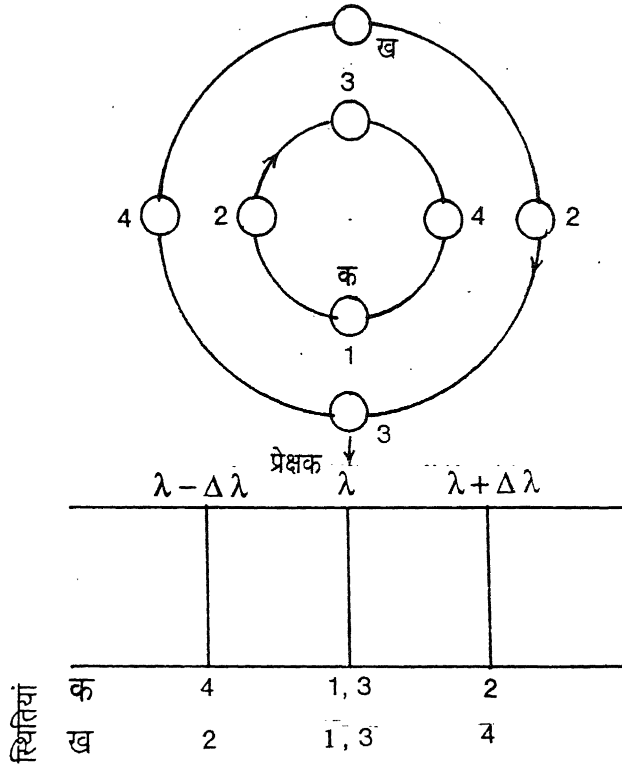


चित्र 2. डॉप्लर प्रभाव ।

प्रेक्षक और स्रोत के सापेक्ष वेग के स्पेक्ट्रम की रेखाओं के तरंग-दैर्घ्य पर प्रभाव दर्शाता व्यवस्था चित्र; डैश रेखाएं समीकरण (2) के अनुसार हैं तथा पूर्ण रेखाएं समीकरण (1), अपेक्षा सिद्धान्त, पर आधारित हैं । यह ध्यान देने योग्य है कि जैसे जैसे सापेक्ष वेग प्रकाश वेग की ओर बढ़ता जाता है समीकरण (2) अनुपयुक्त होता जाता है ।

यदि हम यह जानना चाहें कि सौर मण्डल के ग्रहों के परिमण्डल में कौन सी गैसें हैं तो उनके द्वारा अवशोषण के कारण ग्रह से परावर्तित सौर-प्रकाश के स्पेक्ट्रम में उन गैसों या वाष्पों की अवशोषण रेखाएँ या और बैण्ड होंगे । परन्तु यदि वे गैसें पृथ्वी के वायुमण्डल में भी हैं तो यह पता लगाना कठिन होगा कि वस्तुतः अवशोषण कहाँ हो रहा है । इसका हल भी डॉप्लर प्रभाव की सहायता से निकाल लिया गया । उदाहरणार्थ, मंगल ग्रह पर ऑक्सीजन और जल-वाष्प दोनों पाए गए, परन्तु पृथ्वी की अपेक्षा इसकी मात्रा अत्यन्त स्वल्प है । जब ग्रह-पृथ्वी-सूर्य समकोणिक हों तब ग्रह के वेग

का घटक हमारी दिशा में महत्तम होगा और वहाँ उपस्थित पदार्थों का ग्रह का स्पेक्ट्रम पृथ्वी के वायुमण्डल के अवशोषण-स्पेक्ट्रम की अपेक्षा डॉप्लर-विस्थापित होगा । उपरोक्त के अनुसार हमारा वायुमण्डल विश्व-दर्शन में उसी प्रकार बाधक है जैसे मैले काँच की खिड़की हमारे बाहर के दृश्य के अवलोकन में बाधक होती है । इसका निवारण है खिड़की साफ करना, खोलना या कक्ष के बाहर आकर देखना । इस उद्देश्य से पहले गुब्बारों, फिर रॉकेट, कृत्रिम उपग्रह और अब अन्तरिक्ष-स्टेशनों पर दूरदर्शन, स्पेक्ट्रॉस्कोप आदि उपकरणों को लगा कर खगोल स्पेक्ट्रमिकी के क्षेत्र का विस्तार और उपयोगिता तथा ज्ञान की वृद्धि ।



चित्र 3. स्पेक्ट्रमी युग्म तारे ।

युग्म के दोनों घटक, क और ख उनके द्रव्यमान केन्द्र के गिर्द परिभ्रमण करते हैं. । उनकी भिन्न भिन्न स्थितियों में स्पेक्ट्रम पर पड़ने वाला प्रभाव चित्र में निचले भाग में दर्शाया गया है । दोनों घटकों के लिए विस्थापन का मान भिन्न भिन्न होगा । अधिक द्रव्यमान के घटक की कक्षा छोटी होगी और यदि एक घटक क तारा तथा दूसरा ख उसका ग्रह है तो तारे की कक्षा और छोटी होगी तथा उसके कक्षा में परिभ्रमण के कारण स्पेक्ट्रमी रेखाएँ निरन्तर तरंग-दैर्ध्य-परिवर्तन के अनुसार दोलन करेंगी ।

डॉप्लर-प्रभाव की सहायता से जिन अनेक तथ्यों की जानकारी मिलती है उनमें से कुछ पर ही प्रकाश डाला जाएगा । सूर्य के पृष्ठ पर काले धब्बों के चलने और उनके पुनः उसी स्थान पर पहुँचने से यह जाना गया कि सूर्य अपने अक्ष उसी प्रकार लगभग 25 दिन में पूरा चक्कर लगाता है जैसे पृथ्वी अपने अक्ष पर करीब 24 घण्टे में । यदि सूर्य का अक्ष हमारे अवलोकन की दिशा में नहीं है तो घूमते हुए सूर्य का एक छोर जब हमारी ओर आ रहा है तो दूसरा उसके विपरीत दिशा में जा रहा है । फलतः दोनों छोरों से आने वाले प्रकाश की स्पेक्ट्रम रेखाओं के विस्थापन से सूर्य के घूर्णन काल का मापन हो सका-लगभग $25\frac{1}{2}$ दिन ।

इसी प्रकार उन युग्म तारों का पता लगाया जा सका है जिनको हमारी आँख या दूरदर्शक अलग अलग देखने में असमर्थ हैं । जब वे अपने द्रव्यमान केन्द्र के गिर्द घूमते हैं (चित्र 3) कभी एक तारा हमारी ओर आता तथा दूसरा विपरीत दिशा में जाता दिखाई देता है । बीच में वह स्थिति भी आती है तब उनकी गति हमारे अवलोकन की दिशा के लम्बवत् होती है। परिणाम होता है स्पेक्ट्रमी रेखाओं का इकहरा और बीच बीच में युग्म रूप में होना । यदि जोड़े में से एक तारा अत्यन्त कम दीप्ति का है तब स्पेक्ट्रमी रेखाओं के स्थान (तरंग दैर्घ्य) परिवर्तन से दो तारों के जोड़े के रूप में होने की पुष्टि हो जाती है । यदि जोड़े में से एक तारा और दूसरा ग्रह हो जो स्वयं प्रकाशमान नहीं और तारे की तुलना में काफ़ी छोटा तो दोनों जिस द्रव्यमान केन्द्र के गिर्द घूमेंगे वह तारे के अति निकट होगा तथा तारे की कक्षा भी छोटी होगी यानि चित्र 3 में तारे क की कक्षा । इस स्थिति में तारे के परिक्रमण के कारण उसकी स्पेक्ट्रमी रेखाएँ डॉप्लर प्रभाव के फलस्वरूप दोलन करेंगी । इनका दोलन-काल तारे के अपनी कक्षा में एक पूरा चक्कर लगाने के बराबर होगा जिसकी तथा तरंग दैर्ध्य में परिवर्तन के मान की जानकारी हमको न केवल ग्रह के अस्तित्व वरन् उसके द्रव्यमान, आकार तथा उसकी कक्षा के अभिलक्षणिकों का ज्ञान करायेगी । विगत कुछ वर्षों में सौर परिवार के बाहर बृहस्पति सदृश्य लगभग एक दर्जन से ऊपर ग्रहों का पता लगाया गया है । सारणी 1 में इनमें से तीन के बारे में जानकारी एकत्रित है ।

सारणी 1

जनक तारे का नाम तथा उसका स्पेक्ट्रमी वर्ग	दूरी प्रकाश वर्षों में	परिक्रमण-काल, वर्षों में	कक्षीय अर्द्ध दीर्घ-अक्ष खगोलीय एकक में	कक्षीय उत्केन्द्रता	द्रव्यमान एकक बृहस्पति
पेगसी G2-3V	40	0.012	0.05	0.00	≥ 0.6
70 कन्या G5V	80	0.320	0.43	0.38	≥ 6.5
47 सप्तर्षि G0V	46	3.000	2.10	0.00	≥ 2.3

इसी क्रम में एक और रोचक अवलोकन भी महत्व का है । कुछ तारों की स्पेक्ट्रमी रेखाएं तीक्ष्ण (शार्प) तथा कुछ की विपरीत (डिफ्यूज्ड़) मिलती हैं; अभिजित (वेगा) पहले प्रकार तथा श्रवण

(अल्तादूइर) दूसरे प्रकार के तारों का उदाहरण है । यदि इन तारों के अक्ष हमारे अवलोकन की दिशा में नहीं हैं तो तारे के तेजी से घूमने के कारण रेखाएँ विखंडित हो सकती हैं क्योंकि उसके पृष्ठ के भिन्न भिन्न भाग बदलते वेग से हमारी ओर या हम से दूर जा रहे हैं जिसका फल है रेखाओं का विसरित होना । घूर्णन जितना तेज होगा विसरण उतना ही अधिक । चित्र 1 में हम देखते हैं कि सौर स्पेक्ट्रम की रेखाएँ तीक्ष्ण हैं क्योंकि उसका घूर्णन वेग कम है । वस्तुतः सौर परिवार के कोणीय संवेग का केवल केवल 2 प्रतिशत सूर्य के पास है और शेष 98 प्रतिशत के भागीदार नवग्रह हैं । ईश्वर न करे यदि किसी वजह से ये ग्रह सूर्य में लीन हो जायँ तो सूर्य पचास गुनी तेज़ी से घूमता हुआ लगभग 12 घण्टे में एक चक्कर पूरा कर लेगा तथा उसके स्पेक्ट्रम की रेखाएँ भी विसरित हो जाएँगी। अतः यह अनुमान लगाना संगत होगा कि स्पेक्ट्रमी रेखाओं का तीक्ष्ण होना तारे का अपना ग्रह परिवार होने का संकेत देता है तथा विसरित होना सम्भवतः उसके अकेले होने का। जिन तारों के साथ ग्रह हैं उन ग्रहों पर जीवन है या नहीं यह कई कारकों पर निर्भर है जिन पर यहाँ विचार करना सम्भव नहीं।

इस प्रभाव के अध्ययन द्वारा और जो जानकारी प्राप्त होती है उसके कतिपय उदाहरण हैं :

1. शनि के वलयों क़ी संरचना छल्ले की भाँति ठोस न होकर कणों के रूप में होना ।
2. स्पन्दमान तारों का अध्ययन तारों के फूलने और सिकुड़ने से स्पेक्ट्रम की रेखाओं के विस्थापन से उनका स्पन्दन-काल तथा उससे सम्बन्धित जानकारी प्राप्त करना ।
3. अभिरक्त विस्थापन और प्रसारी विश्व जिसके बारे में हम ऊपर चर्चा कर चुके हैं ।

कुछ अन्य तथ्य

परमाणु में चुम्बकत्व होने के कारण जब उसे चुम्बकीय क्षेत्र में रखा जाता है तो वह क्षेत्र में कुछ विशिष्ट दिशाओं में ही पुरस्सरण करता है । यह क्रिया कुछ ऐसी ही है जैसे गुरुत्वीय क्षेत्र में लट्टू का लम्ब से भिन्न दिशा में घूर्णन करने पर; परन्तु लट्टू का पुरस्सरण किसी भी कोण पर हो सकता है । परमाणु तथा अणुओं में दिशाएँ सीमित हैं जिससे उनके ऊर्जा बल कई निश्चित उपतलों में विभाजित हो जाते हैं । फलतः स्पेक्ट्रमी रेखाएँ कई घटकों में विभाजित हो जाती हैं । प्रयोगशाला में यह अवलोकन 1896 में ज़ीमन ने किया और इसको **ज़ीमन प्रभाव** नाम से जाना जाता है तथा इसकी सहायता से जहाँ परमाणुओं और अणुओं के ऊर्जा-तलों की जानकारी प्राप्त होती है वहीं विलोमतः इस प्रभाव के अवलोकन से उस परिवेश के चुम्बकीय क्षेत्र का मापन किया जा सकता है जहाँ उन रेखाओं के जनक परमाणु और अणु हैं जिनके ज़ीमन घटकों का अवलोकन और मापन किया गया है। इसी प्रभाव की सहायता से सूर्य की सतह पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का मापन किया गया है। भिन्न भिन्न स्थानों पर क्षेत्र का मान भिन्न है । सूर्य के धब्बे अधिक चुम्बकीय क्षेत्र दर्शाते हैं । छोटे आकार के धब्बों का क्षेत्र 100 गाउस या उससे कम हो सकता है जब कि बड़े धब्बों के लिए मान 3700 गाउस तक आँका गया है । इसी प्रकार अन्य तारों पर भी चुम्बकीय क्षेत्र होने की पुष्टि हुई है ।

क्योंकि सूर्य तथा अन्य तारे आयनीकृत गैसों मय हैं अतः उन पर चुम्बकीय क्षेत्र पृथ्वी की अपेक्षा अधिक परिवर्तनशील है । इन तथ्यों के क्रमबद्ध-अध्ययन से उन पिण्डों की संरचना सम्बन्धी अनेक तथ्य प्रकाश में आते हैं ।

स्पेक्ट्रमी अध्ययनों के आधार पर ही यह ज्ञात किया गया है कि विश्व में भिन्न भिन्न तत्वों का सापेक्ष बाहुल्य क्या है । आकाशीय सघन पिण्डों के अतिरिक्त अन्तर्तारकीय रिक्त वास्तव में रिक्त नहीं है । यदि हम किसी ऐसे तारे से जो घने गैसीय गुब्बारों के पीछे या उनके बीच में हैं, आने वाले प्रकाश का अध्ययन करें तो उसके अपने स्पेक्ट्रम के अतिरिक्त अवशोषित रेखाओं का स्पेक्ट्रम मिलता है जिनको तारे के पृष्ठ पर की गैसों तथा दूसरे वायुमण्डल द्वारा अवशोषित फ्रॉनहोफ़र रेखाओं से भिन्न पाया गया है । इन सबको डॉप्लर-प्रभाव की सहायता से पृथक कर पहचाना जा सकता है । इनमें H, K, Na, Ca, Ca^+, CH, CH^+, CN, OH, SiO, H_2O, NH_3 आदि के अतिरिक्त HCHO, CH_2CHCN, HCN, HC_3CN, HC_5CN, HC_7CN और HC_9CN जैसे जैविक महत्व के अणुओं का अन्तरिक्ष में पाया जाना आश्चर्य की बात है । क्या जीवन निर्माण के अवयव सर्वत्र वितरित हैं ?

इस तारतम्य में दृश्य प्रकाश के अतिरिक्त अवरक्त और माइक्रोवेब विकिरण कभी कभी अधिक सहायक होता है । इनकी (मिलीमीटर और सेण्टीमीटर परास की विद्युत-चुम्बकीय तरंगों की) खोज के बाद उनकी सहायता से अन्तरिक्ष की रिक्तता में भी हाइड्रोजन के परमाणुओं, OH के रेडीकल और जल (H_2O) के अणुओं का अस्तित्व पाया गया है । तारों से दूर न तो ये पदार्थ स्वप्रकाशित हैं और न ही अवशोषण के लिए दृश्य प्रकाश उपलब्ध है । अन्तरिक्ष के शून्य के निकट के ताप पर इनके न्यूनतम ऊर्जा-तलों में जो संक्रमण होते हैं उनकी ऊर्जा H, OH और H_2O के लिए क्रमशः 21 से० मी०, 18 से० मी० और 1.35 से० मी० के तरंगदैर्ध्य के संगत हैं । यह आश्चर्य की बात है कि गैस के घने गुब्बारों के निकट जैसे मृगतारामण्डल को बृहत् नीहारिका में या जहाँ नए तारों का निर्माण हो रहा है वहाँ OH और H_2O की 18 से० मी० और 1.35 से० मी० की रेखाओं की तीव्रता, ध्रुवीकरण और तीक्ष्णता यह दर्शाती है कि उनका उद्भव लेसर (माइक्रोवेव के क्षेत्र में लेसर) का परिणाम है- ब्रह्माण्डीय लेसर ।

उपसंहार

मोटे तौर पर हमने देखा कि मानवसृष्टि के उद्भव से लेकर प्रलय तक के सूत्रों के जानने की चेष्टा कर रहा है। इन अध्ययनों में से प्रत्येक के विस्तार में जाने पर परिदृश्य स्पष्ट होता दिखाई देता है। वह सौर मण्डल के ग्रहों की खोज में कुछ सीमा तक सफल हुआ है और यह भी खोज निकाला है कि जीवन के सृजन से सम्बन्धित अवयव अप्रत्याशित परिवेश में अन्तरिक्ष में बिखरे पड़े हैं । तब उस जैसे मनीषी और जिज्ञासु भी इस धरा से दूर अन्यत्र भी होंगे । सब कुछ पहुँच के निकट प्रतीत होता है, फिर भी संभव है कि जैसे जैसे हम क्षितिज की ओर बढ़ते हैं वह दूर सरकती लगती है । सफलता निकट होते हुए भी दूर है, पर अन्त में पकड़ में आनी चाहिए - ज्ञान के क्षेत्र में अनासक्त योग असम्भव को सम्भव बना सकता है ।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 1, January, 1998.

संयुग्मी फूरियर श्रेणी की प्रबल बोरेल संकलनीयता

एम० के० शुक्ला तथा एम० पी० सचान

गणित विभाग, शासकीय स्वायत्तशासी स्नातकोत्तर महाविद्यालय, शहडोल

[प्राप्त- सितम्बर 1, 1997]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में आदर्श परिस्थितियों के अन्तर्गत संयुग्मी फूरियर श्रेणी की प्रबल बोरेल संकलनीयता के विषय में पर्याप्त उत्तम परिणामों की स्थापना की गई है।

Abstract

The strong Borel summability of a conjucate Fourier Series. *By* M.K. Shukla and M.P. Sachan, Department of Mathematics, Govt. Autonomus P. G. College, Shahdol (M.P.)

In this paper the authors have established a pair of sufficiently good results concening the strong Borel summaability of a conjugate Fourier series of f(x) under standard conditions.

1. परिभाषाएँ तथा संकेतन

माना कि अनन्त श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ के आंशिक योगफलों $S_n \sum_{0}^{n} u_k$ का अनुक्रम है। हार्डी तथा लिटिलवुड[1,2] एवं राय[3] ने क्रमशः एक अनन्त श्रेणी की प्रबल $(C, 1)$, $(R, \log n, 1)$ तथा लागरिथमीय संकलनीयताओं की परिभाषा दी है। हाल ही में कैथल[4] में ने उसी की प्रबल बोरेल संकलनीय को निम्न प्रकार रखा है ।

परिभाषा :

कोई अनन्त श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ बोरेल के घातीय माध्यों (exponential means) से प्रबलतः संकलनीय या किसी सान्त संख्या S के प्रति प्रबलतः संकलीयन (B) कहलाती है यदि

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|S_k - S| p^k}{k!} = 0(e^p) \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty \tag{1.1}$$

माना कि फलन $f = f(x)$ की फूरियर श्रेणी जो की अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय (L) है और इस अन्तराल के बाहर आवर्त 2π के साथ आवर्ती है उसे निम्न द्वारा लिखा जावेगा—

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{0}^{\infty} A_n(x) \tag{1.2}$$

तब फूरियर श्रेणी (1.2) की संयुग्मी श्रेणी जो f (x) की संयुग्मी फूरियर श्रेणी कहलाती है वह इस प्रकार है—

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \equiv \sum_{1}^{\infty} B_n(x) \tag{1.3}$$

हम निम्नलिखित संकेतनों का प्रायः उपयोग करेंगे :

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$$

$$\psi_0(t) = f(x+t) - f(x-t)$$

$$\Phi(t) = \int_0^t |\varphi(u)| du$$

$$\Psi(t) = \int_0^t |\psi_0(u)| du$$

2. प्रस्तावना

$f(x)$ की फूरियर श्रेणी की प्रबल बोरेल संकलनीयता पर विचार करते हुए कैथल[4] ने निम्नलिखित परिणाम सिद्ध किये गये हैं।

यदि $f(t)$ समाकलनीय L है और

$$\Psi(t) \equiv \int_0^t |\varphi(u)| du = 0\left\{\frac{t}{\log 1/t}\right\} \tag{2.1}$$

ज्यों - ज्यों $t \to 0$ तो

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|S_k - S|}{k\,!} p^k = 0\,(e^p \log\log p) \tag{2.2}$$

ज्यों-ज्यों $p \to \infty$.

प्रमेय B : यदि $f(x)\, t=0$ के पार्श्व मे समाकलनीय वर्ग हो और यदि

$$\Phi(t) = 0(t), \quad \text{ज्यों-ज्यों}\, t \to 0 \text{ तथा} \tag{2.3}$$

$$\int_t^{\pi} \frac{[\varphi(u)]^2}{u^2} du = 0(1) \tag{2.4}$$

तो $f(x)$ की फूरियर श्रेणी बोरेल के घातीय माध्यों के द्वारा प्रबलतः संकलनीय है। या योगफल S के प्रति संकलनीय [B] है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य उपर्युक्त A तथा B प्रमेयों को $f(x)$ की फूरियर श्रेणी तक विस्तारित करना है। इसलिये हम निम्नलिखित प्रेमयों के युग्म की यहाँ स्थापना करेंगे—

प्रमेय 1 : यदि

$$\psi_0(t) \equiv \int_0^t |\psi(u)|\, du = 0 \left\{\frac{t}{\log 1/t}\right\} \text{ज्यों-ज्यों } dt \to 0, \text{तो} \tag{2.5}$$

$$\sum_{k+0}^{\infty} \frac{p^k}{K} \left| S_k - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{\tan t/2} dt \right| = 0\,(e^p \log\log p) \tag{2.6}$$

ज्यों-ज्यों $t \to 0$ जहाँ S_n संयुग्मी फूरियर श्रेणी (1.2) के nवें आंशिक योग को दर्शाता है ।

प्रमेय 2 : यदि f (x) x के पार्श्व में समाकलनीय वर्ग हो और यदि

$$\Psi_0(t) = 0\,(t) \text{ज्यों-ज्यों}\, t \to 0 \tag{2.7}$$

तथा

$$\int_t^{\pi} \frac{[\psi(u)]^2}{u^2} du = 0(1) \tag{2.8}$$

तो संयुग्मी फुरियर श्रेणी (1.2) बोरेल घातीय माध्यों (expenentiai means) द्वारा प्रबलतः संकलनीय है या समाकल के मान के प्रति समाकलनीय (B) है।

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{i/p}^{\pi} \psi_0(t) \cot t/2 \, dt$$

बशर्ते कि यह समाकल कौशी के अनुसार विद्यमान हो।

3. सहायक प्रमेयिकाएँ

आगे हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता पड़ेगी—

प्रमेयिका 1.

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k t = \frac{\cos t/2 - \cos(n + 1/2) t}{2 \sin t/2}$$

उपपत्ति : हम लिखेंगे

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k t + i \sum_{k=1}^{n} \sin k t$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\cos k t + \sin k t) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$$

$$= \frac{e^{it}(1 - e^{int})}{(1 - e^{it})} = \frac{e^{it/2} - e^{it/2}(1 - e^{int})}{(e^{-it/2} - e^{it/2})}$$

$$= \frac{e^{i/t/2} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{-2 i \sin t/2} = \frac{i[e^{it/2} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}]}{2 \sin t/2}$$

$$= \frac{i\left[\{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t\} - i\{\sin(n+\frac{1}{2})t - \sin\frac{t}{2}\}\right]}{2 \sin t/2}$$

जिससे दोनों पक्षों के काल्पनिक खण्डों को तुल्य करने पर तुरन्त ही प्रमेयिका प्राप्त होती है।

2. प्रमेयिका : यदि

$0 < t < 1/p$ तो

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k} \left| \frac{1 - \cos k t}{\tan t/2} \right| = O\,[p e^p], \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty$$

उपपत्ति : यदि $0 < t < \frac{1}{p} < \frac{1}{k}$, तो

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| \frac{1-\cos k t}{\tan t/2} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| \frac{2 \sin^2 k t/2 \cos \frac{t}{2}}{\sin t/2} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{!k} \frac{2 \sin^2 k t/2}{t/\pi}, \text{ क्योंकि } \sin t/w \geq t/\pi$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \frac{O(k^2 t^2)}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} O(k) \text{ क्योंकि } kt < 1$$

$$= O\left[p \sum_{k=t}^{\infty} \frac{p^{k-i}}{(k-1)!} \right] = O\ [p\, e^p]$$

ज्यों-ज्यों $p \to \infty$

प्रमेयिका 3 : यदि $\frac{1}{p} < t < \delta < 1$ तो

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| \frac{\cos k t}{t} \right| = O(e^p/t) \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty$$

उत्पत्ति : $\frac{1}{p} < t < \delta$ होने पर

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| \frac{\cos k t}{t} \right| \leq \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} = O\left(\frac{e^p}{t} \right), \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty$$

4. प्रमेय 1 की उपपत्ति

प्रमेयिका 1 का उपयोग करने पर संयुग्मी फूरियर श्रेणी (1.2) के n वें आंशिक योग S_n को निम्न के द्वारा व्यक्त किया जाता है—

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_0(t) \left[\sum_{k=1}^{n} \sin k t \right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_0(t) \left[\frac{\cos \frac{t}{2} - \cos(n + \frac{1}{2}) t}{2 \sin t/2} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi_0(t) \left[\frac{\cos \frac{t}{2} (1 - \cos n t)}{\sin t/2} + \sin n t \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi_0(t) \cot t/2 \, dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi_0(t) \frac{\cos nt}{\tan t/2} \, dt + 0(1)$$

(रीमान-लेबेस्क प्रमेय से)

अब हम $\delta > 0$ को ऐसा चुनते हैं कि वह स्थिर हो तथा इतना लघु कि परिकल्पना (2.5) $t \leq \delta$ के लिये लागू हो[5] और तब हम लिखते हैं-

$$S_n - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\pi} \psi_0(t) \cot \frac{t}{2} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{1/p} \psi_0(t) \left(\frac{1 - \cos nt}{\tan t/2} \right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\delta} \psi_0(t) \frac{\cos nt}{\tan t/2} \, dt + 0(1)$$

क्योंकि (δ, π) में अन्तिम समाकल शून्य की ओर अग्रसर होता है ज्यों-ज्यों $n \to \infty$ (रीमान-लेबेस्क प्रमेय से)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{1/p} \psi_0(t) \left(\frac{1 - \cos nt}{\tan t/2} \right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\delta} \psi_0(t) \frac{\cos nt}{\tan t/2} \, dt + 0(1) \qquad (4.1)$$

अपंरच,

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\pi} \psi_0(t) \cot \frac{t}{2} \, dt,$$

मानने पर (4.1) से हम निम्नलिखित प्राप्त करेंगे —

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| S_k - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\pi} \psi_0(t) \cot \frac{t}{2} \, dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{1/p} |\psi_0(t)| \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| \left(\frac{1 - \cos kt}{\tan t/2} \right) \right| \right] dt$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{1/p}^{\delta} |\psi_0(t)| \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| \frac{\cos kt}{t} \right| \right] dt + 0 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} P_1 + \frac{1}{\pi} P_2 + 0(e^p), \text{माना} \qquad (4.2)$$

प्रमेयिका 2 तथा परिकल्पना (2.5) को व्यवहृत करने पर

$$P_1 = \int_0^{1/p} |\psi_0(t)| \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k} \left| \frac{1-\cos k t}{\tan t/2} \right| \right] dt$$

$$= \int_0^{1/p} |\psi_0(t)| 0 \, (p e^p) \, dt$$

$$= O\,(p e^p) \int_\delta^{1/p} |\psi_0(t)| \, dt$$

$$= O(p e^p) \; 0 \; (1/p)$$

$$= O(e^p) \qquad \text{ज्यों-ज्यों } p \to \infty \qquad (4.3)$$

पुनः प्रमेयिका 3 तथा परिकल्पना (2.5) से

$$P_2 = \int_{1/p}^{\delta} |\psi_0(t)| \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k\,!} \left| \frac{\cos k t}{t} \right| \right] dt$$

$$= \int_{1/p}^{\delta} |\psi_0(t)| \; O\left(\frac{e^p}{t}\right) dt$$

$$= O\,(e^p) \int_{1/p}^{\delta} \frac{|\psi_0(t)|}{t} \, dt$$

$$= O\,(e^p) \left[\frac{\Psi_0(t)}{t} + \int \frac{\Psi_0(t)}{t^2} \, dt \right]_{1/p}^{\delta}$$

$$= O\,(e^p) \left[0(1) + \int_{1/p}^{\delta} 0\left(\frac{1}{t \log 1/t}\right) dt \right]$$

$$= O\,(e^p) \left[0(1) + 0 \left\{ -\log\log\frac{1}{t} \right\}_{1/p}^{\delta} \right]$$

$$= O\,(e^p) \; [\, 1 + (\log\log p - \log\log 1/\delta)]$$

$$= O\,(e^p \log\log p), \text{ज्यों-ज्यों} p \to \infty \, \text{जबकि } p > 1/\delta \qquad (4.4)$$

अन्त में (4.2), (4.3) एवं (4.4) को ध्यान में रखते हुए यह स्पष्ट हो जाता है कि

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| S_k - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{\tan t/2} \, dt \right|$$

$$= O\,(e^{p} \log \log p)\,, \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty \qquad (4.5)$$

इस तरह प्रमेय 1 की उपपत्ति पूर्ण होती है। इससे यह पता चलता है कि परिकल्पना (2.5) संयुग्मी फूरियर श्रेणी (1.2) की प्रबल संकलनीयता का आश्वासन नहीं देती ।

5. प्रमेय 2 की उपपत्ति

प्रमेय 1 की ही तरह अग्रसर होने पर संयुग्मी फूरियर श्रेणी के n वें आंशिक योग S_n को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं, यदि रीमान-लेबेस्क प्रमेय का सम्प्रयोग करें

$$S_n - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\pi} \psi_0(t) \cot \frac{t}{2} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1/p} \psi_0(t) \left(\frac{1 - \cos nt}{\tan t/2} \right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\pi} \psi_0(t) \frac{\cos nt}{\tan t/2} \, dt + 0(1)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1/p} \psi_0(t) \frac{2 \sin^2}{\tan t/2} \frac{nt}{2} \, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\pi} \psi_0(t) \frac{\cos nt}{t/2} \, dt + 0(1) \qquad (5.1)$$

क्योंकि $\psi(t) \left\{ \tan \frac{t}{2} - \frac{2}{t} \right\}$ समाकलनीय (L) है $(1/p, \pi)$ में ।

पुनःश्च (5.1) के आधार पर हम लिखेगें

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| S_k - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\pi} \psi_0(t) \cot \frac{t}{2} \, dt \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1/p} \psi_0 \frac{\sin^2 \frac{kt}{2}}{\tan t/2} \, dt - \frac{1}{\pi} \int_{1/p}^{\pi} \psi_0(t) \frac{\cos kt}{t} \, dt \right| + 0 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k} \right\}$$

$$\le \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \int_{0}^{1/p} |\psi_0(t)| \left| \frac{\sin^2(kt/2)}{\tan t/2} \right| dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{k!}\left|\int_{1/p}^{\pi}\psi_0(t)\ \frac{\cos kt}{t}dt\right| + 0(e^p)$$

$$= \frac{1}{\pi}\ [I_1+I_2] + 0(e^p), \text{माना} \qquad (5.2)$$

परिकल्पना (2.7) का उपयोग करने पर

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{k!}\int_0^{1/p}|\psi_0(t)|\left|\frac{\sin^2(kt/2)}{\tan t/2}\right|dt$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{k!}\int_0^{1/p}|\psi_0(t)|\ O(k)\,dt$$

$$= O(p)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^{1/p}|\psi_0(t)|dt$$

$$= O(p)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{(k-1)!}\ O(1/p) = 0\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{(k-1)!}\right\}$$

$$= 0(e^p) \text{ज्यों-ज्यों} p\to\infty \qquad (5.3)$$

तत्पश्चात् श्वार्ज की असमिका को व्यवहृत करने तथा परिकल्पना (2.7) का उपयोग करने पर

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{k!}\left|\int_{1/p}^{\pi}\frac{\psi_0(t)}{t}\cos kt\,dt\right|$$

$$\leq \int_{1/p}^{\pi}\left|\frac{\psi_0(t)}{t}\right|\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{k!}|\cos kt|\,dt\right\}$$

$$< \left[\int_{1/p}^{\pi}\left|\frac{\psi_0(t)}{t}\right|^2 dt\ \int_{1/p}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{k!}|\cos kt|\right\}^2 dt\right]^{1/2}$$

$$= \left[0(1)\int_{1/p}^{\pi}\left\{O(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{k'!}\right\}^2 dt\right]^{1/2}$$

$$= \left[0(1) \int_{1/p}^{\pi} O\{e^{p}\}^2 \, dt \right]^{1/2}$$

$$= \left[0(1)\, O(e^{2p})\, (\pi - \frac{1}{p}) \right]^{1/2}$$

$$= 0(e^{p}), \text{ज्यों-ज्यों} \, p \to \infty \qquad (5.4)$$

अन्त में (5.2), (5.3) तथा (5.4) के द्वारा यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left| S_k - \frac{1}{2\pi} \int_{1/p}^{\pi} \psi_0(t) \cot \frac{t}{2} \, dt \right|$$

$$= 0(e^{p}), \text{ज्यों-ज्यों} \, p \to \infty$$

इस तरह प्रमेय की स्थापना हो जाती है।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच० तथा लिटिलवुड, जे० ई० : Comptes Rendus 1913, 156, 1307-1309

2. हार्डी, जी० एच० तथा लिटिलवुड, जे० ई० : Fund. Math 1935, 25 162-189.

3. राय, ओ० पी० : Proc. Japan Acad. 1966, 42, 243-246.

4. कैथल, पी० डी० : पी-एच० डी० थीसिस, सागर विश्वविद्यालय, 1968

5. टिश्मार्श, ई० सी० : The Theory of Functions, आक्सफोर्ड 1961.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 1, January, 1998.

वाहित मल-जल से मृदा प्रदूषण

शिवगोपाल मिश्र तथा दिनेश मणि

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान,
इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त-नवम्बर 10, 1997]

सारांश

विश्लेषणों द्वारा अब यह ज्ञात हो चुका है कि वाहित मल-जल में नाइट्रोजन तथा फास्फोरस के अतिरिक्त कुछ भारी धातुयें यथा-कैडमियम, क्रोमियम, लेड, जिंक आदि भी पायी जाती हैं जो मृदा में संचित होते रहने पर मृदा के धात्विक प्रदूषण का कारण बनती हैं। साथ ही, पौधों द्वारा अनके उद्ग्रहण से उनकी वृद्धि तथा उपज पर बुरा प्रभाव पड़ता है। भारी धातुओं के इन्हीं हानिकारक प्रभावों को देखते हुये प्रस्तुत शोधकार्य सम्पन्न किया गया तथा मृदा में भारी धातुओं की अभिवृद्धि एवं पौधों द्वारा इनके उद्ग्रहण को कम करने के उपाय खोजे गये।

Abstract

Soilpollution through domestic sewage. *By* S.G. Misra and Dinesh Mani, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad.

It has now been observed that besides nitrogen and posphorus some heavy metals viz. Cd. Cr, Pb, Zn etc. are invariably present in domestic sewage which go on accumulating in soil and are responsible for the metallic pollution of soil.

These heavy metals affect adversely both growth and yield of plants when grown on polluted soil. The present study was undertaken with a view to study the harmful effects of some of the heavy metals. Measures for mitigating the accumulation and uptake of such heavy metals were also worked out.

गरीब किसान वाहित मल-जल से सिंचाई करके अच्छी उपज लेते रहे हैं और नगण्य लागत पर आवश्यक पोषक तत्वों से अपनी भूमि को उर्वर बनाते रहे हैं। मिचेल[1] ने यूरोप में वाहित मल-जल से की जाने वाली खेती का सर्वेक्षण करने के पश्चात् यह पाया कि वाहित मल-जल से सब्जियों तथा घासों की उपज में आशातीत वृद्धि तो होती है किन्तु वाहित मल-जल से सिंचाई करने पर आवश्यक पोषक तत्वों के साथ-साथ कुछ विषैली भारी धातुयें भी मिट्टी में मिलती रहती हैं जिनका प्रतिकूल प्रभाव मिट्टी तथा पौधों दोनों पर पड़ता है। इन भारी धातुओं में Cd , Cr, Pb, Cu, Zn मुख्य रूप से उपस्थित रहती हैं किन्तु इनमें से Cd के ऊपर विशेष ध्यान दिया जा रहा है। एब्डन तथा नेनाह[2] के अनुसार बलुई मिट्टियों की सिंचाई वाहित मल-जल से करने पर मिट्टी की संरचना सुधर जाती है किन्तु लगातार सिंचाई करते रहने से भविष्य में नाइट्रोजन के खनिजीकरण पर प्रतिकूल असर पड़ सकता है। शर्मा तथा कौशल[3] ने लुधियाना के आस-पास के वाहित मल-जल से सिंचित क्षेत्र का सर्वेक्षण किया है और यह देखा है कि वाहित मल-जल में Fe, Mn, Cu तथा Cd की अधिक मात्रा होने के कारण मिट्टी तथा पौधों में इन धातुओं की अधिक मात्रा पाई गई जबकि ट्यूब वेल के पानी से सिंचित क्षेत्र में ऐसा नहीं पाया गया। इन विषैली भारी धातुओं में से कैडमियम धातु अत्यन्त विषैली होती है। नगण्य लागत पर वाहित मल-जल एवं अवमल के प्रयोग द्वारा खेती करना और अधिक उपज प्राप्त करना बुद्धिमानी नहीं कहा जा सकता क्योंकि अब यह निश्चित हो चुका है कि वाहित मल-जल (सीवेज) तथा अवमल (स्लज) के लगातार उपयोग से मिट्टी में कैडमियम (Cd), क्रोमियम (Cr), लेड (Pb) तथा जिंक (Zn) जैसी विषैली भारी धातुओं की मात्रा में वृद्धि होती है।[4] अवमल के अल्पकालीन प्रयोग से पौधों के खाद्य भागों में विशेषकर पत्तियों में विषैली भारी धातुओं के संचय होने की प्रवृत्ति पाई गई।[5] एक अन्य अध्ययन से चौलाई की पत्तियों में अन्य सब्जियों की तुलना में, कैडमियम का संचय अधिक होने की सम्भावना व्यक्त की जा चुकी है। [6,7] वैसे अवमल कार्बनिक पदार्थ एवं अन्य पोषक तत्वों का अच्छा स्रोत है किन्तु विषैली भारी धातुओं की उपस्थिति के कारण इसके हानिकारक प्रभाव से बचने के लिये फास्फोरस युक्त उर्वरक का प्रयोग आवश्यक होता है। कार्बनिक पदार्थ एवं फास्फोरस युक्त उर्वरक की उपस्थिति में विषैली भारी धातुओं का अवशोषण पौधों में कम होता है क्योंकि कार्बनिक पदार्थ भारी धातुओं के साथ जटिल यौगिक बनाकर[8] उन्हें निश्चेष्ट[9] बनाता है।

हालाँकि घरेलू वाहित मल-जल में भारी धातुओं की मात्रा औद्योगिक वाहित मल-जल की तुलना में काफी कम होती है, फिर भी इनके एकत्रित होने की प्रवृत्ति के कारण इनकी सान्द्रता बढ़ सकती है।

यदि वाहित मल-जल को अनियन्त्रित ढंग से प्रयोग किया जाय तो इसमें सामान्य रूप से पायी जाने वाली भारी धातुयें यथा Cd, Cu, Mo, Ni, Zn इत्यादि, गम्भीर समस्या उत्पन्न कर सकती हैं।[10] भारी धातुयें पौधे द्वारा अवशोषित होकर उनकी उपापचयी क्रियाओं को प्रभावित कर सकती हैं पौधों की कोशिकाओं में एकत्र होकर खाद्य श्रृंखला में प्रवेश कर सकती हैं तथा मनुष्यों और पशुओं में विभिन्न रोगों का कारण बन सकती हैं। हर्म्स तथा ब्रूमर[11] के अनुसार 4-8 पी-एच० मान वाली मृदाओं में कार्बनिक पदार्थों के द्वारा भारी धातुओं की उपलब्धता बढ़ती है परन्तु जब कार्बनिक पदार्थ

की अधिक मात्रा का प्रयोग किया जाता है तो इनकी उपलब्धता घटती है। पौधों द्वारा कैडमियम (Cd) का उद्ग्रहण मिट्टी में कार्बनिक पदार्थ की प्रतिशत मात्रा द्वारा प्रभावित होता है क्योंकि मिट्टी में कार्बनिक पदार्थ की मात्रा अधिक होने पर कैडमियम (Cd) मृदा कणों द्वारा अधिशोषित कर लिया जाता है।[12, 13, 14]

प्रयोगात्मक

वाहित मल-जल एकत्रीकरण एवं विश्लेषण

वाहित मल-जल के दस नमूने शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रयोगात्मक फार्म के निकट से बह रहे नगर महापालिका के नाले से विभिन्न स्थानों से लिये गये। इस नाले में मुख्यतः घरेलू अपशिष्ट ही रहता है। इस फार्म पर उपलब्ध वाहित मल-जल के भौतिक-रासायनिक गुणधर्म सारणी-1 में दिये गये हैं। कुल घुलनशील लवण तथा जैव रासायनिक ऑक्सीजन माँग सम्बन्धी परिणाम सारणी 2 में दर्शाये गये हैं। ये विश्लेषण मैनिवासकम द्वारा[15] वर्णित विधियों द्वारा किये गये।

सारणी 1 तथा सारणी 2 देखें।

सारणी 1

शीलाधर प्रयोगात्मक फार्म पर उपलब्ध
वाहित मल-जल के भौतिकरासायनिक गुणधर्म

पी-एच० (pH)		7.1–7.6
विद्युत् चालकता (EC d Sm^{-1})		840 - 1920
कुल ठोस पदार्थ (मि० ग्रा० / ली०)		188 - 220
कुल कठोरता	(")	180-220
क्षारीयता	(")	130-240
क्लोराइड	(")	15.0 - 32.0
कुल नाइट्रोजन	(")	2.25 - 6.75
नाइट्रेट नाइट्रोजन	(")	0.02 - 0.75
फॉस्फेट	(' ')	0.05 - 1.4
सल्फेट	(' ')	4.60 - 12.0

भारी धातुओं के विश्लेषण के लिये एटॉमिक एब्जार्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर (PYE UNICAM SP 2900 coupled with SP-9 computer) की सहायता ली गयी।

वाहित मल-जल में भारी धातुओं की कुल मात्रा ज्ञात करने के लिये शुष्क किये गये नमूनों को

डाइ-एसिड मिश्रण द्वारा निष्कर्षित किया गया। वाहित मल-जल तथा अवमल भारी धातुओं की सान्द्रता सम्बन्धी परिणाम सारणी 3 में दिये गये हैं।

सारणी 2

शीलाधर प्रयोगात्मक फार्म पर उपलब्ध वाहित मल-जल में कुल घुलनशील ठोस पदार्थ (TDS) तथा जैव रासायनिक माँग (BOD) का स्तर

पी-एच०	कुल घुलनशील लवण	BOD_5 200^0 C पर (मि० ग्रा/ ली०)
7.1	270.80	106.20
7.2	432.40	96.00
7.6	388.20	120.00
7.2	376.30	98.40
7.5	392.40	115.70
7.3	188.20	98.60
7.1	320.60	150.40
7.3	196.20	103.10
7.1	395.80	116.00
7.2	402.30	115.20
माध्य 7.2	336.32	111.99

सारणी 3

शीलाधर फार्म पर उपलब्ध वाहित मल-जल में भारी धातुओं की सान्द्रता

नमूना सं०	भारी धातुओं की सान्द्रता (पी० पी० एम० में)					
	Cd	Cr	Pb	Zn	Fe	Mn
1.	0.60	0.28	5.00	10.00	12.00	10.60
2.	0.85	0.70	8.00	8.00	11.50	13.60
3.	0.26	0.55	2.60	9.50	10.80	12.80
4.	0.45	0.60	0.70	5.80	8.00	11.30
माध्य	0.54	0.58	3.52	8.32	10.52	12.12

भारी धातुओं के उद्ग्रहण को कम करने के उपाय

मृदा में भारी धातुओं की अभिवृद्धि एवं पौधों द्वारा इनके उद्ग्रहण को कम करने के उपाय की दिशा में हमने कार्बनिक पदार्थ तथा फास्फेटीय पदार्थ के साथ प्रयोग करने का निश्चय किया। गोबर की खाद से कार्बनिक पदार्थ की पूर्ति की गई और मसूरी रॉक फास्फेट से फास्फोरस की।

सारणी 4

विभिन्न उपचारों के फलस्वरूप प्राप्त पालक की उपज

उपचार	ताजा भार किग्रा/मी०	शुष्क भार भार ग्राम/ मी०^2
1. (FYM + MRP = 0) कन्ट्रोल	0.300	60
2. FYM (0) + MRP (125 कि०ग्रा०/है०)	0.900	140
3. FYM (0) + MRP (150 " ")	0.900	140
4. FYM (0) + MRP (175 " ")	1.000	160
5. FYM (15 टन/है०) + MRP (0)	1.200	180
6. FYM (15 " ") + MRP (125 कि० ग्रा०/ है०)	1.200	180
7. FYM (15 " ") + MRP (150 " ")	1.300	180
8. FYM (15 " ") + MRP (175 " ")	1.100	160
9. FYM (20 टन/है०) + MRP (0)	1.000	160
10. FYM (20 " ")+ MRP (125 किग्रा०/है०)	1.000	160
11. FYM (20 " ") + MRP (150 " ")	1.500	200
12.FYM (20 " ") + MRP (175 " ")	1.300	180
13. FYM (25 टन/है०) + MRP (0)	2.000	240
14. FYM (25 " ") + MRP (125 किग्रा०/ है०)	2.200	240
15. FYM (25 " ") + MRP (150)	2.800	260
16. FYM (25 " ") + MRP (175 " ")	2.800	260

इस प्रयोग के लिये 48 वर्गमीटर के क्षेत्रफल में यादृच्छिक विधि से 1 × 1 मीटर के प्लॉट बनाकर उपचार किये गये। इन प्लाटों में गोबर की खाद (FYM) की चार विभिन्न मात्रायें (0, 15, 20, 25 टन प्रति हैक्टेयर) तथा मसूरी रॉक फास्फेट (MRP) की भी चार विभिन्न मात्रायें (0, 125, 150, 175 किलोग्राम प्रति हैक्टेयर) डाली गई, मसूरी रॉक फास्फेट में कुल P_2O_5 की मात्रा 19.4% थी तथा

गोबर की खाद में कुल कार्बन, नाइट्रोजन फास्फोरस एवं पोटाश की मात्रायें क्रमशः 1.5, 0.5, 0.25 तथा 0.5% थीं। प्लॉटों में पालक को सूचक फसल के रूप में उगाया गया। पालक की बुवाई 20 किग्रा प्रति हैक्टेयर की दर से की गई। प्लाटों की सिंचाई वाहित मल-जल से समय-समय पर की गयी। इस तरह कुल 8 सिंचाइयाँ की गयीं। लगभग 60 दिन पश्चात् फसल की कटाई की गयी। उपज सम्बन्धी आँकड़े सारणी 4 में दिये गये हैं।

पौधों की पत्तियों को सुखाकर उन्हें बारीक पीसकर डाइ-एसिड मिश्रण द्वारा निष्कर्षित करके निष्कर्ष में एटॉमिक एब्जार्प्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर की सहायता से विषैली भारी धातुओं की कुल मात्रा ज्ञात की गयी। इसके परिणाम सारणी 5 में अंकित हैं।

सारणी 5

पालक की पत्तियों में भारी धातुओं की सान्द्रता

उपचार	भारी धातुओं की सान्द्रता (पी० पी० एम०)			
	Cd	Cr	Pb	Zn
1. (FYM + MRP = 0) कन्ट्रोल	3.50	12.0	10.0	10.2
2. FYM (0) + MRP (125 किग्रा/ है०)	3.20	10.9	9.6	12.2
3. FYM (0) + MRP (150 " ")	4.40	11.2	9.8	12.0
4. FYM (0) + MRP (175 " ")	4.80	11.5	9.2	11.5
5. FYM (15 टन/ है०) MRP (0)	3.15	11.4	9.4	13.9
6. FYM (15 " ") + MRP (125 किग्रा/ है०)	3.20	10.5	8.5	14.2
7. FYM (15 " ") + MRP (150 " ")	3.30	10.8	8.8	16.2
8. FYM (15 " ") + MRP (175 " ")	3.10	10.9	8.5	16.6
9. FYM (20 टन/है०) + MRP (0)	3.90	10.6	9.9	17.0
10. FYM (20 " ") + MRP (125 किग्रा/ है०)	3.60	11.0	9.2	14.6
11. FYM (20 " ") + MRP (150 " ")	4.20	10.8	8.5	15.6
12. FYM (20 " ") + MRP (175 " ")	3.80	10.6	8.8	17.0
13. FYM (25 टन/ है०) + MRP (0)	2.90	9.9	8.2	18.0
14. FYM (25 " ") + MRP 125 किग्रा० / है०)	3.10	10.8	9.5	16.4
15. FYM (25 " ") + MRP (150 ")	3.00	10.2	9.2	15.9
16. FYM (25 " ") + MRP (175 " ")	2.80	9.5	8.0	16.2

परिणाम तथा विवेचना

वाहित मल-जल :- सारणी 1 में दिये गये पी-एच० मान से स्पष्ट है कि वाहित मल-जल उदासीन से हल्का क्षारीय है। इसकी विद्युत् चालकता 840 से 1920 $d\,S\,m^{-1}$ है। सारणी 2 को देखने से पता चलता है कि नमूनों में कुल घुलनशील लवणों की मात्रा 188.20 से 432.40 मिग्रा० / ली० तक है तथा जैव-रासायनिक ऑक्सीजन माँग (BOD) 96.00 से 150.40 मिग्रा० / ली० तक है। ये मान यह बताते हैं कि शीलाधर फार्म पर प्रयुक्त वाहित मल-जल बहुत बुरा नहीं है।

कैडमियम : वाहित मल-जल में (सारणी 3) कैडमियम की सान्द्रता 0.26 से 0.85 मि० ग्रा०/ ली० तक पायी गयी। FAO [17] के अनुसार सिंचाई जल में कैडमियम की अधिकतम अनुमेय सान्द्रता 0.01 मिग्रा०/ली० है। इस प्रकार कैडमियम की मात्रा के आधार पर यह वाहित मल-जल सिंचाई के लिये अनुपयुक्त है।

क्रोमियम : वाहित जल-मल में क्रोमियम की सान्द्रता 0.28 से 0.70 मिग्रा/ ली० पायी गयी। FAO के अनुसार सिंचाई जल में क्रोमियम की अधिकतम अनुमेय सान्द्रता 0.10 मिग्रा/ ली० है। इस प्रकार क्रोमियम की मात्रा के आधार पर भी यह वाहित मल-जल सिंचाई के लिये अनुपयुक्त है।

लेड : प्रस्तुत अध्ययन में वाहित मल-जल में लेड की सान्द्रता 0.70 से 5.80 मिग्रा / ली० तक पायी गयी जबकि FAO के अनुसार सिंचाई जल में लेड की अधिकतम अनुमेय सान्द्रता 5 मिग्रा० / ली० है। इस प्रकार लेड की मात्रा के आधार पर वाहित मल-जल सिंचाई के लिये प्रयोग करने पर उचित सावधानी बरतने की आवश्यकता है।

जिंक : जिंक की सान्द्रता 5.80 से 10.00 मिग्रा/ ली० पायी गयी जो मल-जल के घरेलू होने के कारण अधिक है। बाडवर तथा चने[18] के अनुसार अधिकतम जिंक की सीमा (दीर्घकालीन सिंचाई उद्देश्य के लिये) 2 मिग्रा/. ली० है। इस प्रकार यह जल सिंचाई के लिये अनुपयुक्त ही कहा जायेगा।

आयरनः वाहित मल-जल में आयरन की मात्रा 8.00 से 12.00 मिग्रा/ ली० तक पायी गयी। FAO तथा Nat. Acad. of Sciences [19] के अनुसार सिंचाई जल में आयरन की अधिकतम अनुमेय सान्द्रता 5 मिग्रा०/ ली० है। इस प्रकार आयरन की मात्रा के आधार पर भी यह जल सिंचाई के लिये उपयोगी नहीं है।

मैंगनीज : वाहित मल जल में मैंगनीज की मात्रा 10.60 से 13.60 मिग्रा/ ली० तक पायी गयी। इसकी अधिकतम मात्रा पौधों में विषाक्तता के लिये उत्तरदायी है। प्रार्ट[20] के अनुसार इसकी अधिकतम अनुमेय सान्द्रता 0.2 मिग्रा/ ली० है।

इस प्रकार शीलाधर फार्म पर सिंचाई के लिये प्रयुक्त वाहित मल-जल असन्तोषजनक स्थिति उत्पन्न कर सकता है। अतः उसे उचित उपचार के बाद ही इसे सिंचाई हेतु प्रयोग किया जाना चाहिए।

सारणी 4 में अंकित उपज सम्बन्धी परिणामों से इस बात की पुष्टि होती है कि कार्बनिक पदार्थ

तथा फास्फेट की अधिक मात्रा की उपस्थिति में पालक की सर्वाधिक उपज हुई है। यह उपज 'कन्ट्रोल' की तुलना में लगभग 9 गुनी (शुष्क भार में 4.5 गुना) है।

सारणी के विवेचन से स्पष्ट है कि कार्बनिक पदार्थ तथा फास्फेट की मात्रा बढ़ाने से पालक पत्तियों द्वारा Cd, Cr तथा Pb का अवशोषण में कम होता है। अकेले मसूरी रॉक फास्फेट या अकेले कार्बनिक पदार्थ की कम या औसत मात्रा प्रयोग करने पर भारी धातुओं के अवशोषण में कोई विशेष कमी नहीं आई है। यदि कार्बनिक पदार्थ अधिक मात्रा में (25 टन प्रति हैक्टेयर) प्रयोग किया जाता है तो कैडमियम (Cd) का अवशोषण 18-20 प्रतिशत तक कम हो जाता है किन्तु साथ ही मसूरी रॉक फास्फेट की भी अधिक मात्रा प्रयुक्त होनी चाहिये। कैडमियम (Cd) की ही तरह लेड (Pb) के अवशोषण में 20% की तथा क्रोमियम (Cr) के अवशोषण में 16% तक की कमी आई है। केवल जिंक (Zn) ही ऐसी भारी धातु है जिसके अवशोषण में कोई कमी नहीं आई बल्कि अधिकता ही परिलक्षित हुई है। वाहित मल-जल में पहले से ही जिंक की मात्रा अधिक होने के कारण ऐसा हो सकता है।

निष्कर्ष

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर संस्तुति की जा सकती है कि खेतों में मल-जल का अकेले उपयोग न करके उपयुक्त कार्बन तथा फास्फोरस स्रोत मिट्टी में मिलाने के बाद करना चाहिए। इस तरह उगी फसल में विषैली भारी धातुओं की सान्द्रता स्वाभाविक रूप से कम हो जायेगी। इसके लिये किसानों को अलग से महँगे उपचार नहीं करने होंगे।

निर्देश

1. मिचेल, जी० ए०, "Observations of Sewage farming in Europe", Engg. New Record 1931, 106 : 66-69.

2. एब्डन, एफ० एम० तथा नेनाह, एम० : Plant and Soil 1980, 56, 53 - 57.

3. शर्मा, वी० के० तथा कौशल, वी० डी० : Polln. Research 1986, 5 (324), 86-91

4. मिश्रा, एस० जी०, श्रीवास्तव, सी०पी० तथा दिनेश मणि : **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका,** 1988, 31, 185-189

5. डोडी, आर० एन० तथा लारसन, डब्ल्यू० ई० J. Environ. Qual 1975, 4, 278-82

6. कौंसिल फॉर एग्रीकल्चर साइंस एण्ड टेक्नोलॉजी, रिपोर्ट नं० 64, CAST, IOWa State University, American, Iowa U.S.A. 1976

7. जारविस, एस० सी०, जोन्स, एल० एच० पी० तथा हॉपर एम० जे०: Plant and Soil 1976, 44, 179-91.

8. ब्लूमफील्ड, सी०, किल्सो, डब्ल्यू० आई० तथा प्रूडेन, जी० : Soil Sci, 1976, 27, 31.

9. क्लेइन, एल० ए०, लेंग, एम० नाश, एन० तथा किर्सचर, एस० एल० : J. Water Pollut. Control Fed., 1974, 46, 1563-1662.

10. कौंसिल ऑन एग्रीकल्चरल साइंस एण्ड टेक्नोलॉजी : Application of Sewage Sludge to Cropland : Appraisal of Potential hazards of the heavy metals to plants and animals. Office of water progammes EPA–44019-76-013, U. S. Environmental Protection Agency, Washington, D.C. 1970.

11. हर्म्स, यू० तथा ब्रूमर, जी० : Influence of different types of natrual organic matter on the solubility of heavy metals in Soils In Proceeding "Environ. efect of organic and inorganic Contaminants in Sewage Sludge, held on May 25-26, 1982 at Stevenage.

12. जॉन, एम० के० : J. Plant Sci. 19872, 52, 715-719

13. हगिरी, एफ, : J. Environ. Qual. 1974, 3, 180-183.

14. मेकलीन, ए० जे० : J. Soil Sci, 1976, 56, 129-138

15. मैनिवासकम, एन० : Physico-chemical examination of water, sewage and industrial effluent. Pragati Prakashan, Meerut, 1985.

16. FAO : Regional Seminar on the treatment and use of Sewage effluent for irrigation, Nicosia Cyprus, 7-9, Oct. 1985.

17. बॉडवर, एच० तथा चने, आर० एल० : Adv. Agron. 1974, 26, 133-176.

18. नेशनल एकेडमी ऑफ साइंसेज नेशनल एकेडमी ऑफ इन्जीनियरिंग:1973 Water Quality Criteria 1972, A report of the Committee on water quality criteria, p. 232-253 EPH - R3 - 73-033, U.S. Environment Protection Agency Washington D.C.

19. प्राट, पी० एफ० : Quality criteria for trace elements in irrigation waters 1972. University of California Experiment Station, Riverside, California.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 1, January, 1998.

फूरियर श्रेणी की $(S_\beta)(C,1)$ संकलनीयता हेतु मानदण्ड

एस० के० भट्ट तथा पी० डी० कठल
शासकीय स्वशासी महाविद्यालय, शहडोल (म० प्र०)

[प्राप्त-जून 26, 1996]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में पर्याप्त व्यापक एकल प्रतिबंध के अधीन फूरियर श्रेणी का $(S_\beta)(C,1)$ संकलनीयता स्थापित की गई है।

Abstract

Criterion for $(S_\beta)(C,1)$ summability of Fourier series. *By* S. K. Bhatt and P. D. Kathal, Government College, Shahdol (M. P.)

The object of the paper is to establish $(S_\beta)(C,1)$ summability of Fourier Series under sufficient wide and single condition.

1. परिभाषाएँ तथा संकेतन

परिभाषा 1

अनंत श्रेणी $\sum_0^\infty un$ जिसके आंशिक योगफल को S_n द्वारा दर्शाया जाता है, योग S के लिए S_β संकलनीय कहलाता है यदि

$$S_\beta^p = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\beta)^{p+1} \binom{p+k}{k} \beta^k S_k \to S \text{ ज्यों, ज्यों } p \to \infty \qquad (1.1)$$

जहाँ $$O < \beta < 1 \text{ एवं} \binom{p+k}{k} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots k}$$

परिभाषा 2

अंनत श्रेणी $\sum_0^\infty un$ जिसके आंशिक योगफल जिसे S_n से दर्शाते हैं, योग S के लिये (C, 1) संकलनीय होगी यदि

$$C^1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k \to S \text{ ज्यों, ज्यों } n \to \infty \tag{1.2}$$

माना कि एक वास्तविक फलन $f(x)$ लेबेग की धारणानुसार अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में समकलनीय तथा आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। कल्पना कीजिए कि —

$$\frac{q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + bn \sin nx) \equiv \sum_0^\infty A_n(x) \tag{1.3}$$

फलन $f(x)$ से सम्बद्ध एक फूरियर श्रेणी है। स्थिर वास्तविक संख्याओं x एवं S के लिये हम लिखते हैं-

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$$

$$t\,\varphi_1(t) = \int_0^t \phi(u)\,du$$

$$\Phi_1(t) = \int_0^t |\varphi_1(\mu)|\,du$$

2. प्रस्तावना

गुणनफल संकलनीयता $(T)(C, 1)$, $(B)(C, 1)$, $(C, 1)(E, 1)$, $(N, p_n)(C, 1)$ इत्यादि का अध्ययन विभिन्न लेखकों ने कई प्रतिबन्धों को लेकर किया है।

इस प्रपत्र में फोरियर श्रेणी (1.3) की $(S\beta)(C, 1)$ गुणनफल संकलनीयता का अध्ययन एकल प्रतिबंध के अधीन किये जाने का प्रयत्न किया गया है।

प्रमेय 1

यदि $$\Phi_1(t) = 0\left(\frac{t}{\log\frac{1}{t}}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0 \tag{2.1}$$

तब फोरियर श्रेणी (1.3) योग S को लिए $(S\beta)(C,1)$ संकलनीय होगी।

3. अनुमान

उपर्युक्त प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हमें निम्न अनुमानों की आवश्यकता होगी।

अन्तराल $0 \le t \le \pi$ में जहाँ $A = \dfrac{2\beta}{(1+\beta)^2 \pi^2} > 0$

$$\frac{(1-\beta)p}{(1+\beta^2-2\beta\cos t)^{p/2}} = O[\exp(-Apt^2)]$$

जहाँ $0 < \beta < 1$ (3.1)

$$\sin[(p+1)\varphi(s,t)] = O\left[\frac{pt}{1-\beta}\right]$$

जहाँ $0 < t < \dfrac{1-\beta}{p}$ (3.2)

$$\text{एवं } \varphi(s,t) = \tan\left(\frac{\beta \sin t}{1-\beta\cos t}\right)$$

अनुमान (3.1) फोर्बीज के द्वारा दिया गया है एवं (3.2) को यहाँ सिद्ध किया जा रहा है।

$$\sin[(p+1)\varphi(s,t) \le (p+1)\varphi(s,t)$$

$$\le (p+1)\left[\frac{\beta t}{1-\beta} + Ct^3\right]$$

$$\le p\left(1+\frac{1}{p}\right)\left[\frac{\beta t}{1-\beta} + Ct^3\right]$$

$$\le \frac{pt}{1-\beta}\left(1+\frac{1}{p}\right)[\beta + ct^2(1-\beta)]$$

$$= O\left[\frac{pt}{1-\beta}\right]$$

4. प्रमेय की उपपत्ति

टिशमार्श[2] का अनुसरण करते हुए फूरियर श्रेणी (1.3) के आंशिक योग S_n का (C,1) परिवर्त σ_n निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$\sigma_n - S + o(1) = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(nt/2)}{t^2} \varphi(t)\, dt \tag{4.1}$$

खण्डशः समाकलन करने से हम पाते हैं :

$$\sigma_n - S + 0(1) = \frac{2}{n\pi} \left[\frac{t\varphi_1(t)}{t^2} \sin^2 \frac{nt}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$- \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} t\, \varphi_1(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin^2(nt/2)}{t^2} \right) dt \tag{4.2}$$

$$= P - I \text{ माना}$$

समाकलित भाग

$$P = \frac{2}{n\pi} \left[\frac{\varphi_1(\pi)}{\pi} \right] - \frac{2}{\pi} \lim_{t \to 0} \left[\left(\frac{\sin^2(nt/2)}{nt} \right) \varphi_1(t) \right]$$

$$= O(1) - \frac{2}{\pi} \lim_{t \to 0} \left(\frac{n \sin nt}{2n} \right) \cdot \lim_{t \to 0} \varphi_1(t) \tag{4.3}$$

$$= O(1) + O(1) = O(1),$$

ज्यों-ज्यों $n \to \infty, t \to 0$ के पश्चात् तथा

$$I = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \{ t\varphi_1(t) \} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2\sin^2(nt/2)}{t^2} \right\} dt$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \{ t\varphi_1(t) \} \left[\frac{n \sin nt}{t^2} - \frac{4\sin^2(nt/2)}{t^3} \right] dt$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left[\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{1/n^{\alpha}} + \int_{1/n^{\alpha}}^{\pi}\right]\frac{\varphi_1(t)}{t^2}\sin^2\frac{nt}{2}\,dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi_1(t)}{t}\sin nt\,dt$$

$$= (I_1 + I_2 + I_3) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi_1(t)}{t}\sin nt\;dt$$

जहाँ $0 < \alpha < y_3$

अब
$$|I_1| \leq \frac{u}{n\pi}\int_0^{1/n}\frac{|\varphi_1(t)|}{t^2}\,O\,(n^2t^2)\,dt$$

$$= O(n)\int_0^{1/n}|\varphi_1(t)|\;dt$$

$$= O(n)\;0(\frac{1}{n}) = 0(1)\text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty$$

खण्डश : समाकलन करने तथा (2.1) के सम्प्रयोग से

$$|I_2| \leq \frac{u}{n\pi}\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}}\frac{|\varphi_1(t)|}{t^2}\,O(nt)\,dt$$

$$= O(1)\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}}\frac{|\varphi_1(t)}{t}\;dt$$

$$= O(1)\left[O\left\{\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right\} + \int O\left\{\frac{1}{t\log\frac{1}{t}}\right\}dt\right]_{1/n}^{1/n^{\alpha}}$$

$$= O(1) + O\;(1)\left[-\log\log\frac{1}{t}\right]_{1/n}^{1/n^{\alpha}}$$

$$= O(1) + O\left\{\log \frac{1}{\alpha}\right\}$$

$$= O(1) \text{ क्योंकि } \; 0 < \alpha < \frac{1}{3}$$

पुनः

$$|I_3| \leq \frac{u}{n\pi} \int_{1/n^{\alpha}}^{\pi} \frac{|t\varphi_1(t)|}{t^3} dt$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{1-3\alpha}}\right) \cdot O(1)$$

$$= O(1) \text{ ज्यों - ज्यों } n \to \infty$$

क्योंकि $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ तथा समाकलन $\int |t\,\varphi_1(t)|\,dt$ के सांतत्य के अंश से।

अतः स्पष्ट है कि

$$I = O(1) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_1(t)}{t} \sin nt\,dt \tag{4.4}$$

तदुपरान्त (4.2), (4.3), (4.4) से

$$\sigma_n - S + O(1) = O(1) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_1(t)}{t} \sin nt\,dt$$

अब σ_n के S_β रूपान्तरण को अर्थात् फूरियर श्रेणी के (S_β) (C, 1) रूपान्तरण को $S_\beta C^1$ से दर्शाने पर हमें प्राप्त होता है-

$$(S_\beta C_1) - S = O(1) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_1(t)}{t} \sum_{k=0}^{\infty} (1-\beta)^{p+1} \binom{P+k}{k} \beta^k \sin kt\,dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_1(t)}{t}\, Im \sum_{k=0}^{\infty} (1-\beta)^{p+1} \binom{p+k}{k} \beta^k e^{ikt} dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_1(t)}{t} (1-\beta)^{p+1}\, Im \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p+k}{k} \beta^k e^{ikt} dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\varphi_1(t)}{}(1-\beta)^{p+1}\, Im\left((1-\beta e^{it})^{-(p+1)}\right)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\varphi_1(t)}{t}(1-\beta)^{p+1}\, Im\left\{\frac{1}{(1-\beta e^{it})^{p+1}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\varphi_1(t)}{t}\frac{(1-\beta)^{p+1}}{(1+\beta^2-2\beta\cos t)^{\frac{p+1}{2}}}\sin\{(p+1)\varphi(s,t)\}$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left[\int_0^{1-\beta/p} + \int_{1-\beta/p}^{(1-\beta/p)^{\alpha}} + \int_{(1-\beta/p)^{\alpha}}^{\pi}\right]\frac{\varphi_1(t)}{t}\frac{(1-\beta)^{p+1}}{(1+\beta^2-2\beta\cos t)^{\frac{p+1}{2}}}\sin\{(p+1)\varphi(st)\} \tag{4.5}$$

$$= -\frac{1}{\pi}[v_1+v_2+v_3], \text{ माना}$$

जहाँ $0<\alpha<\frac{1}{2}$, एवं $0<\beta<1$

एवं

$$\varphi(r,\ t) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta\sin t}{1-\beta\cos t}\right)$$

आकलन (3.2) एवं परिकल्पना (2.1) का उपयोग करने पर

$$|v_1| \le \int_0^{1-\beta/p} \frac{|\varphi_1(t)|}{t}\, O\left(\frac{pt}{1-\beta}\right)$$

$$= O\left(\frac{p}{1-\beta}\right)\int_0^{1-\beta/p} |\varphi_1(t)|\, dt$$

$$= O\left(\frac{p}{1-\beta}\right)\int_0\left(\frac{1-\beta}{p}\right) \tag{4.6}$$

$$= O(1) \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty$$

(2.1) का पुनः उपयोग करते हुए

$$|v_2| \leq \int_{1-\beta/p}^{(1-\beta/p)^{\alpha}} \frac{|\varphi_1(t)|}{t} O(1)$$

चूंकि sine फलन परिबद्ध है।

$$= O(1) \int_{1-\beta/p}^{(1-\beta/p)^{\alpha}} \frac{|\varphi_1(t)|}{t} dt$$

$$= O(1) O(1)$$

$$= O(1) \text{ ज्यों-ज्यों } P \to \infty$$

अंत में आकलन (3.1) का उपयोग करने पर एवं $\int |t\ \varphi_1(t)|$ के सांतत्य अंश से

$$|v_3| \leq \int_{(1-\beta/p)^{\alpha}}^{\pi} \frac{|t\varphi_1(t)|}{t^2} O\left[\exp\left\{-A(p+1)^2\right\}\right] dt$$

$$= O\left[\frac{p^{2\alpha}}{(1-\beta)^{2\alpha}} \frac{1}{\exp\left[A(p+1)\frac{(1-\beta)^{2\alpha}}{p_{2\alpha}}\right]}\right] \int_{(1-\beta/p)^{\alpha}}^{\pi} |t\varphi_1(t)|\ dt$$

$$= O(1) \text{ चूँकि } p \to \infty \text{ एवं } \begin{matrix} 0 < \beta < 1 \\ 0 < \alpha < \frac{1}{2} \end{matrix}$$

(4.5), (4.6), (4.7) एवं (4.8) का संग्रह करने पर हमें प्राप्त होता है

$$(S_{\beta} C^1) - S = 0(1) \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty.$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत शोध-पत्र की तैयारी में डॉ० एम० पी० सचान, सेवानिवृत्त प्राचार्य एवं डॉ० सी० के० शर्मा, अध्यक्ष गणित विभाग, अवधेश प्रताप सिंह विश्वविद्यालय, रीवाँ ने जो मार्गदर्शन एवं महत्वपूर्ण

सुझाव दिये, तदर्थ लेखक दोनों विद्वानों के प्रति आभार व्यक्त करते हैं।

निर्देश

1. फोर्बीज, आर० एल० : कैनडियन मेथे० बुलेटिन 1965, 8, 797-808
2. टिशमार्श, ई० सी० : The Theory of functions, 1961, 414-416.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 1, January, 1998.

दो चरों वाले हार्न फलन से सम्बन्धित आंशिक समाकल

एस० एस० श्रीवास्तव तथा बी० एम० एल० श्रीवास्तव

शासकीय मॉडेल साइंस कॉलेज, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त - जुलाई 1, 1997]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य कतिपय आंशिक समाकलों को प्राप्त करना है जिनमें द्विचर वाले हार्न फलन निहित हैं।

Abstract

Fractional integral involving Horn function of two variables. *By* S. S. Srivastava, Department of Mathematics, Government college Jaisingh Nagar, Shahdol (M.P.) and B. M. L. Srivastava, Department of Mathematics, Government Model Science College, Rewa (M.P.).

The aim of the paper is to obtain some partial integrals involving Horn function of two variables.

1. प्रस्तावना

दो चरों वाले हार्न फलन H_1, H_2, H_3, H_4 G_1 तथा G_2 जो एर्डेल्यी द्वारा दिये गये हैं उन्हें निम्नवत् परिभाषित किया जाता है-

$$H_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta;x,y)=\sum_{m,n\,u}^{\infty}\frac{(\alpha,m-n)(\beta,m+n)(\gamma,n)}{(1,m)(1,n)(\delta,m)}x^m y^n, \tag{1.1}$$

$$H_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta;\varepsilon;y)=\sum_{m,n\,o}^{\infty}\frac{(\alpha,m-n)(\beta,m)(\gamma,n)(\delta,n)}{(1,m)(1,n)(\varepsilon,m)}x^m y^n, \tag{1.2}$$

$$H_3(\alpha,\beta,\gamma;x,y)=\sum_{m,n\,o}^{\infty}\frac{(\alpha,m-n)(\beta,m)}{(1,m)(1,n)(\gamma,m)}x^m y^n, \tag{1.3}$$

$$H_4(\alpha,\beta;\delta;x,y)=\sum_{m,n\,o}^{\infty}\frac{(\alpha,m-n)(\beta,n)}{(1,m)(1,n)(\delta,m)}x^m y^n, \tag{1.4}$$

$$G_1(\alpha,\beta';\beta;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,n-m)(\beta',m-n)}{(1,m)(1,n)}x^m y^n, \tag{1.5}$$

$$G_2(\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m)(\alpha_1,n)(\beta,n-m)(\beta_1,m-n)}{(1,m)(1,n)}x^m y^n \tag{1.6}$$

जहाँ (a,n) ऐसा पाछमर संकेत है जिससे कि

$$(a,n)=a(a+1)\ldots(a+n-1):(a,0)=1.$$

प्रस्तुत अध्ययन के लिये हमें भी निम्नलिखित समाकलों की आवश्यकता होगी।

$$\int_0^y (y-x)^{\mu-1}\,dx=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+1)}\,y^{\mu};\ \mathrm{Re}(\mu)\ 0, \tag{1.7}$$

$$\int_y^{\infty} x^{-\lambda}(x-y)^{\mu-1}\,dx=\frac{\Gamma(\lambda-\mu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda)}\,y^{\mu-\lambda};, \tag{1.8}$$

$$0<\mathrm{Re}(\mu)<\mathrm{Re}(\lambda)$$

जहाँ (1.7) रीमान लिओल है तथा (1.8) वेइल आंशिक समाकल [1, p.185 and p. 201] है।

2. मुख्य परिणाम

जिन आंशिक समाकलों का मान ज्ञात करना है वे हैं-

$$\int_0^y (y-x)^{\mu-1} H_1(\alpha, \beta, \gamma; \mu; z_1(y-x), z_2)\, dx$$

$$= y^{\mu} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+1)} H_1(\alpha, \beta, \gamma; \mu+1; z_1 y, z_2), \tag{2.1}$$

$$\int_0^y (y-x)^{\mu-1} H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \mu; z_1(y-x), z_2)\, dx$$

$$= y^{\mu} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+1)} H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \mu+1; z_1 y, z_2), \tag{2.2}$$

$$\int_0^y (y-x)^{\mu-1} H_3(\alpha, \beta; \mu; z_1(y-x), z_2)\, dx$$

$$= y^{\mu} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+1)} H_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \mu+1; z_1 y, z_2), \tag{2.3}$$

$$\int_0^y (y-x)^{\mu-1} H_4(\alpha, \beta; \mu; z_1(y-x), z_2)\, dx$$

$$= y^{\mu} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+1)} H_4(\alpha, \beta; \mu+1; z_1 y, z_2), \tag{2.4}$$

$$\int_y^\infty x^{-\lambda} (x-y)^{\mu-1} H_2(\alpha, \lambda, 1-\mu; \delta; \varepsilon; \frac{z_1}{x}, \frac{z_2}{(x-y)})\, dx$$

$$= y^{\mu-\lambda} \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda-\mu)}{\Gamma(\lambda)} H_1(\alpha, \lambda-\mu, \delta; \varepsilon; \frac{z_1}{y}, \frac{-z_2}{y}), \tag{2.5}$$

$$\int_y^\infty x^{-\lambda} (x-y)^{\mu-1} G_2(\lambda, 1-\mu; \beta; \beta_1; \frac{z_1}{x}, \frac{z_2}{(x-y)})\, dx$$

$$= y^{\mu-\lambda} \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda-\mu)}{\Gamma(\lambda)} G_1(\lambda-\mu . \beta, \beta_1; \varepsilon; \frac{z_1}{y}, \frac{-z_2}{y}), \tag{2.6}$$

(2.1) की उत्पत्ति

निम्न पर विचार कीजिये

$$\phi = \int_0^y (y-x)^{\mu-1} H_1(\alpha, \beta, \gamma; \mu; z_1(\lambda - x), z_2)\, dx$$

अब H_1 को श्रेणी रूप में व्यक्त करें तथा संकलन एवं समाकलन का क्रम बदल दें तो (1.7) की सहायता से हमें

$$\phi = \sum_{r,=o}^{\infty} \frac{(\alpha, r-s)(\beta, r+s)(\gamma, s)}{(1, r)(1, s)(\mu, r)} \cdot \frac{\Gamma(\mu+r)}{\Gamma(\mu+r+1)} (y z_1)^r Z_2^s y^{\mu}$$

प्राप्त होगा। पुनः निम्नलिखित परिणाम

$$(\alpha_1 n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, \tag{2.7}$$

का उपयोग करने पर हमें

$$\phi\, y^{\mu} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+1)} \sum_{r,s=o}^{\infty} \frac{(\alpha, r-s)(\beta, r+s)(\gamma, s)}{(1, r)(1, s)(\mu+1, r)} (z_1, y)^r z_2^s$$

प्राप्त होगा जो (1.1) के परिप्रेक्ष्य में (2.1) प्रदान करता है।

इसी तरह से (2.2) से लेकर (2.4) तक के परिणाम व्युत्पन्न किये जा सकते हैं।

(2.4) की उत्पत्ति

निम्न पर विचार करें

$$\phi = \int_y^{\infty} x^{-\lambda} (x-y)^{\mu-1} H_2(\alpha, \lambda, 1-\mu, \delta; \varepsilon; \frac{z_1}{x}, \frac{z_2}{(x-y)})\, dx$$

अब H_2 को श्रेणी रूप में व्यक्त करें तथा संकलन एवं समाकलन क्रम को बदल दें और आन्तरिक समाकल का मान (1.8) की सहायता से निकालें तो हमें

$$\phi = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(\alpha, r-s)(\lambda, r)(1-\mu, s)(\delta, s)}{(1, r)(1, s)(\varepsilon, r)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+r-\mu+s)\Gamma(\mu-s)}{\Gamma(\lambda+r)} \left(\frac{z_1}{y}\right)^r \left(\frac{z_2}{y}\right)^s y^{\mu-\lambda}$$

प्राप्त होगा। अब परिणाम (2.7) तथा

$$\Gamma(z-n) = \frac{(-1)^n \, \Gamma(z)}{(1-z, n)},$$

का प्रयोग करने पर हमें

$$\phi = y^{\mu-\lambda} \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\lambda-\mu)}{\Gamma(\lambda)} \sum_{r,s=o}^{\infty} \frac{(\alpha, r-s)\,(\lambda-\mu, r+s)\,(\delta, s)}{(1,r)\,(1,s)\,(\epsilon, r)} \times \left(\frac{z_1}{y}\right)^r \left(\frac{-z_2}{y}\right)^s.$$

प्राप्त होता है। अन्त में (1.1) की सहायता से इसका विश्लेषण करने पर हमें (2.5) प्राप्त होता है।

परिणाम (2.6) की उपपत्ति उपर्युक्त प्रकार से होगी।

निर्देश

1. बेटमान प्रोजेक्ट : Tables of Integrals Transform, खंड II मेक्ग्राहिल, न्यूयार्क 1954
2. एर्डेल्यी, ए०, H.T.F. खंड I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954

प्राप्त होगा। अब परिणाम (2.7) तथा

$$\Gamma(z-n) = \frac{(-1)^n \, \Gamma(z)}{(1-z,\, n)},$$

का प्रयोग करने पर हमें

$$\phi = y^{\mu-\lambda} \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\lambda-\mu)}{\Gamma(\lambda)} \sum_{r,s=o}^{\infty} \frac{(\alpha, r-s)\,(\lambda-\mu, r+s)\,(\delta, s)}{(1, r)\,(1, s)\,(\varepsilon, r)} \times \left(\frac{z_1}{y}\right)^r \left(\frac{-z_2}{y}\right)^s.$$

प्राप्त होता है। अन्त में (1.1) की सहायता से इसका विश्लेषण करने पर हमें (2.5) प्राप्त होता है।

परिणाम (2.6) की उपपत्ति उपर्युक्त प्रकार से होगी।

निर्देश

1. बेटमान प्रोजेक्ट : Tables of Integrals Transform, खंड II मेक्ग्राहिल, न्यूयार्क 1954

2. एर्डेल्यी, ए०, H.T.F. खंड I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 1, January, 1998.

असमांग गतिमान छड़ में उष्मा चालन में बहुपदों की सामान्य श्रेणी तथा बहुचर I-फलन का सम्प्रयोग

एस० एन० विश्वकर्मा तथा वाई० एन० प्रसाद

गणित विभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालॉजी, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी (उ०प्र०)

[प्राप्त-सितम्बर 7, 1996]

सारांश

इस प्रपत्र में हमने एक असमांग गतिमान छड़ में उष्मा चालन से सम्बद्ध निर्मेय से सम्बन्धित आंशिक अवकल समीकरण के हल करने के लिए बहुचर I-फलन तथा बहुपदों की सामान्य श्रेणी के सम्प्रयोग पर विचार किया है।

Abstract

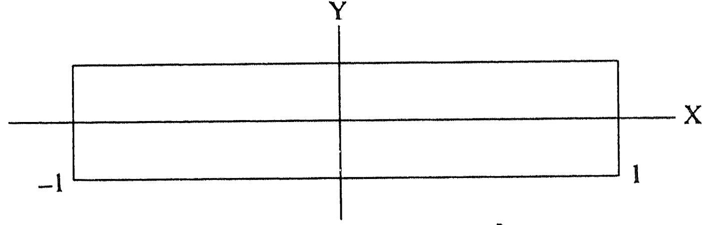
Application of the general class of polynomials and multivariable *I*-function in heat conduction in non-homonogeneous moving bar. *By* S. N. Vishwakarma and Y. N. Prasad, Department of Mathematics, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi (U.P.).

In the present paper, we have considered the application of multivariable I-function and the general class of polynomials in solving a partial differential equation related to the problem of heat conduction in non-homogeneous moving bar.

1. प्रस्तावना

इस अनुभाग में हमने उष्मा चालन (Heat Conduction) के लिये एक भौतिक निर्मेय का ढाँचा तैयार किया है जिसके हल करने में बहुपदों की सामान्य श्रेणी व्यवहृत होगी।

हमने ऐसी छड़ में ताप वितरण पर विचार किया है जो अपनी लम्बाई (X-अक्ष) की दिशा में $x = -1$ से लेकर $x = 1$ सीमाओं के बीच गति कर रही है।



हमने छड़ की चालकता तथा वेग को चरों के रूप में माना है। हम यह कल्पना करते हैं w स्थिर अनुप्रस्थकाटीय क्षेत्रफल है, K, C तथा ρ क्रमशः छड़ की चालकता, विशिष्ट उष्मा तथा घनत्व हैं। किसी काल t तथा एकसमान छड़ की किसी दूरी x के लिए, जो एकसमान वेग u से गति कर रही हो, ताप $V(x, t)$ द्वारा तुष्ट होने वाले अवकल समीकरण को कार्सला तथा जीगर [1, p. 148] के अनुसार निम्न द्वारा दिया जाता है।

$$\frac{K}{\rho C}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - U\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{1.1}$$

अब हम ऐसी असमांग छड़ पर विचार करेंगे जिसकी चर चालकता $(K_0(1-x^2)$ और चरवेग $k[\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)x]$ है जहाँ $k = k_0/\rho C$, $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$, $\mathrm{Re}(\beta) > -1$, k_0, α, β अचर हैं। तब अवकल समीकरण (1.1) समानीत हो जाता है (1.2) में।

$$\frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial t} = (1-x^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + [(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta+2)x]\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1.2}$$

निर्मेय का हल

यदि अवकल समीकरण (1.2) का हल

$$V = X(x)\,T(t)$$

मान लें तो (1.2) समानीत होता है (1.3) में।

$$\frac{1}{kT}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\left[(1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2} + \{(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta+2)x\}\frac{dX}{dx}\right]. \tag{1.3}$$

अब समीकरण (1.3) के प्रत्येक पक्ष को अचर $-n(n+\alpha+\beta+1)$ के तुल्य मानने पर हम निम्नलिखित समीकरण प्राप्त करते हैं।

$$(1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2}+\{(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta+2)x\}$$

$$\times\frac{dX}{dx}+n(n+\alpha+\beta+1)X=0 \qquad (1.4)$$

तथा

$$\frac{dT}{dt}+kn(n+\alpha+\beta+1)T=0 \qquad (1.5)$$

चूँकि समीकरण (1.4) की तुष्टि जैकोबी बहुपद से होती है अतः इसका हल निम्नवत् है-

$$X=\rho_n^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad (1.6)$$

समीकरण (1.5) का हल इस प्रकार है-

$$T=A_n\exp[-kn(n+\alpha+\beta+1)t] \qquad (1.7)$$

अतः हमारे समीकरण (1.2) का सामान्य हल इस प्रकार है-

$$V(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\exp\{-kn(n+\alpha+\beta+1)t\}\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \qquad (1.8)$$

जहाँ $A_n, n=0,1,2,..;$ अचर हैं।

प्रारम्भिक ताप वितरण $(V(x,0)=f(x)$ है।

समीकरण (1.8) के दोनों पक्षों में $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ से गुणा करने, $x=-1$ से +1 के मध्य समाकलन करने तथा एर्डेल्यी के निम्नलिखित परिणाम [2,p.284] को व्यवहृत करने पर

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\left[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2dx$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, \qquad (1.9)$$

$\mathrm{Re}(\alpha)>-1$, $\mathrm{Re}(\beta)>-1$, हमें

$$A_n=\frac{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}$$

$$\times \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) f(x)\, dx \tag{1.10}$$

प्राप्त होता है। अतः गतिमान छड़ पर ताप वितरण को

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}$$

$$\times \exp\{-kn(n+\alpha+\beta+1)t\}$$

$$P_n^{(\alpha\,\beta)}(x) \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, f(x)\, dx, \tag{1.11}$$

$Re(\alpha) > -1$ और $Re(\beta) > -1$ द्वारा दिया जाता है।

उदाहरण

हम $f(x)$ को श्रीवास्तव[4] द्वारा परिभाषित बहुपदों की सामान्य श्रेणी $S_n^m[x]$, तथा प्रसाद[3] द्वारा परिभाषित बहुचर I-फलन का जो कि निम्नवत् है—

$$f(x) = S_{l_1}^{m_1}\left[\xi(1-x)^{h}(1+x)^{h'}\right] I\left[\xi_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\mu'_1},\ldots,\right.$$

$$\left.\left[\xi_r(1-x)^{\mu_r}(1+x)^{\mu'_r}\right],\right. \tag{1.12}$$

जहाँ $I[x_1,\ldots x_r]$ बहुचर I-फलन है, का गुणनफल मानते हैं । समीकरण (1.11) में (1.2) में दिये गये रूप में $f(x)$ का मान रखने पर तथा बहुचर I-फलन को उसके कंटूर रूप में लिखने तथा आन्तरिक समाकल का एर्डेल्यी [2,p.284], के निम्नलिखित परिणाम

$$\int_{1}^{1} (1-x)(1+x)^{\sigma} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx' = \frac{2^{\rho+\sigma+1}\Gamma(\rho+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\rho+\sigma+2)}$$

$$3^{F}2(-n,\alpha+\beta+n+1,\rho+1,\alpha+1,\rho+\sigma+2;1), \tag{1.13}$$

$Re(\rho) > -1$, $Re(\sigma) > -1$ की सहायता से मान निकालने पर तथा अन्त में प्राप्त गामा फलन की बहुचर I-फलन के प्रकाश में व्याख्या करने पर (1.2) का सामान्य हल प्राप्त करते हैं जो इस प्रकार है-

$$V(x,t)=\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{n}\sum_{\eta=0}^{[\zeta_1/m_1]}\frac{(-\zeta_1)_{m_1\eta}}{n!}A_{\zeta_1,\eta}(\xi)^{\eta}$$

$$\frac{(-1)^N(n!)^2(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}\;\frac{2^{\eta(h+h')}\Gamma(\alpha+\beta+n+N+1)}{N!\,\Gamma(n-N+1)\Gamma(\alpha+N+1)}$$

$$\times\exp\{-kn(n+\alpha+\beta+1)t\}\;P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$I^{0,n_2:\ldots:0,n_r+2:(m',n');\ldots;(m^{(r)},n^{(r)})}_{p_2,q_2:\ldots:p_r+2,q_r+1:[p',q'];\ldots;[p^{(r)},q^{(r)}]}$$

$$\left[\begin{matrix}\left(a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j}\right)_{1,p_2}:\ldots:\left(-\alpha-N-h\eta;\mu_1,\ldots,\mu_r\right)\\ \left(b_{2j};\beta'_{2j},\beta''_{2j}\right)_{1,q_2}:\ldots:\left(b_{rj};\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r},\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix}\left(-\beta-h'\eta;\mu'_1,\ldots,\mu'_r\right)\left(a_{rj};\alpha'_{rj},\ldots\alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r}:\left(\alpha'_j,\alpha'_j\right);\\ \left(-\alpha-\beta-N-\eta(h+h')-\mu_1+\mu'_1,\ldots\mu_r+\mu'_r\right):\left(b'_j,\beta'_j\right)_{1,q'};\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\ldots;\left(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}}\\ \ldots;\left(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}}\end{matrix}\;\xi_1 2^{\mu_1+\mu_1},\ldots,2^{\mu_r+\mu_r},\right. \tag{1.14}$$

बशर्ते कि m_1 पूर्णांक है

$$\mathrm{Re}(\alpha)>-1,\ \mathrm{Re}(\beta)>-1,\ \mathrm{Re}\left(\alpha+\sum_{i=1}^{r}\mu_i\,\alpha_i+1\right)>0,$$

$$\mathrm{Re}\left(\beta+\sum_{i=1}^{r}\mu_i\,\alpha_i+1\right)>0,\ |\arg(\xi_1)<\frac{1}{2}U_i\,\pi,\ U_i>0,\ i=1,2,\ldots,r;$$

जहाँ

$$\alpha_i=\min\mathrm{Re}\left(b^{(j)}_i/\beta^{(j)}_i\right),\ i=1,2,\ldots,m^{(j)},\ j=1,2,\ldots r; \tag{1.15}$$

तथा

$$U_i=\sum_{i=1}^{n^{(j)}}\alpha^{(j)}_i-\sum_{i=n^{(j)}+1}^{p^{(j)}}\alpha^{(j)}_i+\sum_{i=1}^{m^{(j)}}\beta^{(j)}_i-\sum_{i=m^{(j)}+1}^{q^{(j)}}\beta^{(j)}_i$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n_2}\alpha^{(j)}_{2i}-\sum_{i=n_2+1}^{p_2}\alpha^{(i)}_{2i}\right)+\ldots+\left(\sum_{i=1}^{n_r}\alpha^{(j)}_{ri}-\sum_{i=n_r+1}^{P_r}\alpha^{(j)}_{rj}\right)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{q_2} \beta_{2i}^{(j)} + \ldots + \sum_{i=1}^{q_r} \beta_{ri}^{(j)}\right) \tag{1.16}$$

एवं

$$n_2 = n_3 = \ldots\ n_r = 0$$

विशिष्ट दशाएँ

चूँकि प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा बहुचर I-फलन को कई विशिष्ट फलनों में यथा माइजर G-फलन, फाक्स के H-फलन, फाक्स के H-फलन आदि में समानीत किया जा सकता है तथा $S_{\ell_1}^{m_1}[x]$ को बेसेल, लागेर, हर्माइट बहुपदियों में समानीत किया जा सकता है अतः हल (1.14) अत्यन्त सामान्य प्रकृति का है।

दशा 1

यदि हम (1.14) में

$$m_1 = 1\,,\ A_{\ell_1}, \eta = \binom{\ell_1 + \alpha_1}{\ell_1} \frac{1}{(\alpha_1 + 1)_\eta}$$

$$S_{\ell_1}^{m_1}\left[\xi(1-x)^h\ (1+x)^{h'}\right] L_{\ell_1}^{(\alpha_1)}\left[\xi(1-x)^h(1+x)^{h'}\right]$$

रखें तो (1.2) का सामान्य हल इस प्रकार होगा

$$V(x,t) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{n} \sum_{\eta=0}^{\ell_1} \binom{\ell_1 + \alpha_1}{\ell_1 - \eta} \frac{(-1)^{\eta+N}}{n!}$$

$$\frac{(\xi)^\eta (n!)^2 (\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}$$

$$\frac{2^{\eta(h+h')}\Gamma(\alpha+\beta+n+N+1)}{N!\,\Gamma(n-N+1)\Gamma(\alpha+N+1)} \exp\{-kn(n+\alpha+\beta+1)\}\ P_n^{(\alpha,\beta)_n}(x)$$

$$I^{0,n_2:\ldots:0,n_r+2:(m',n'):\ldots;(m^{(r)},n^{(r)})}_{p_2'q_2:\ldots:P_r+2,q_r+2,q_r+1:[p',q'];\ldots;[p^{(r)},q^{(r)}]}$$

$$\left[\begin{matrix}(a_{2j};\alpha_{2j}',\alpha_{2j}'')_{1,p_2}:\ldots:(-\alpha-N-h\eta;\mu_1,\ldots\mu_e),\\ (b_{2j};\beta_{2j}',\beta_{2j}'')_{1,q_2}:\ldots:(b_{rj},B_{rj}',\ldots,B_{rj}^{(r)})_{1,q_r}\end{matrix}\right.$$

$$(-\beta - h'\eta ; \mu_1', \ldots, \mu_r'), (a_{rj}, \alpha_{rj}' \ldots, \alpha_{rj}^{(r)})_{1,p_r} : (a_j', \alpha_j')_{1,p'} ;$$

$$(-\alpha - \beta - N - \eta(h+h') - 1 ; \mu_1 + \mu_1', \ldots, \mu_r + \mu_r') : (b_j', \beta_j')_{q,q'} ;$$

$$\left. \begin{matrix} \ldots ; \left(a_j^{(r)}, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} & (r) \\ \ldots ; \left(b_j^{(r)}, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} & (r) \end{matrix} \right| \left. \xi_1 . 2^{\mu_1 + \mu_1'}, \ldots, \xi_r . 2^{\mu_r + \mu_r'} \right] \quad (1.17)$$

बशर्ते कि (1.14) में दिये गये उपयुक्त प्रतिबन्ध तुष्ट हों।

दशा II

(1.14) में $m_1 = 1, A_{\ell_1, \eta} = (\alpha_1 + \ell_1 - 1)_\eta$ रखने पर हमारा f (x) दिये हुए रूप में समानीत हो जाता है जिसमें बेसेल बहुपद निहित होते हैं अर्थात्

$$f(x) = Y_{\ell_1}\left[-\beta_1 \left\{\xi(1-x)^h (1-x)^{h'}\right\}, \alpha_1, \beta_1)\right] I\ [\xi_1 (1-x)^{\mu_1} (1+x)^{\mu_1'} \ldots,$$

$\xi_r (1-x)^{\mu_r} (1+x)^{\mu_r'}$], औ र(1.2) का सामान्य हल निम्नवत् है

$$V(x,t) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{n} \sum_{\eta=0}^{\ell} \binom{\ell_1}{\eta} \binom{\ell_1 + \alpha_1 + \eta - 2}{2}$$

$$(-1)^{\eta+N} \eta ! (\xi)^\eta \frac{(n!)^2 (\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)} .$$

$$\times \frac{2^{\eta(h+h')} \Gamma(\alpha+\beta+n+N+1)}{N!(\Gamma(n-N+1)\Gamma(\alpha+N+1)}$$

$$\times \exp\{-kn(n+\alpha+\beta+1)t\} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\ I^\ell[x] \quad (1.18)$$

बशर्ते कि (1.14) में दिये गये उपयुक्त प्रतिबन्ध तुष्ट होते हों तथा $I^1[x]$ वही हो जो दशा I में है

दशा III

(1.14) में $m_1 = 2, A_{\ell_1,\eta} = (-1)^\eta, S_\ell^2\ [\xi(1-x)^h(1+x)^{h'}]$ हर्माइट बहुपद अर्थात् $\{\xi(1-x)^h(1+x)^{h'}\}^{\ell_{1/2}}\ H_{\ell_1}\ [1/2\sqrt{\xi(1-x)^h(1+x)^{h'}}]$ रखने पर (1.2) का सामान्य हल निम्नवत् है

$$V(x,t) = \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{n}\sum_{\eta=0}^{(\ell_{1/2})}\frac{(-1)^{\eta+N}(\ell_1)!(\xi)^\eta}{\eta!(\ell_1-2\eta)!}$$

$$\frac{(n!)^2(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}\ \frac{2^{\eta(h+h')}\cdot\Gamma(\alpha+\beta+n+N+1)}{(n!\Gamma(n-N+1)\Gamma(\alpha+N+1)}$$

$$\times \exp\{-kn(n+\alpha+\beta+1)t\}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\ I^2[x]$$

बशर्ते कि (1.14) में दिये गये उपयुक्त प्रतिबन्ध तुष्ट हों तथा $I^2[x]$ वही हो जो दशा I में है।

दशा IV

(1.12) में

$$r = 4, p_3 = q_3 = n_3 = 0, \alpha'_{4j} = \alpha''_{4j} = 0, (j = 1, \ldots, p_4)$$

तथा

$$B_{4j}' = B''_{4j} = 0, (j = 1, 2, \ldots, q_4)$$

रखने पर चार चरों वाला I-फलन दो चरों वाले दो H-फलनों के गुणनफल में टूट जाता है एवं $m_1 = 1, \ell_1 = 0, A_{0,0} = 1, S_{\ell}^{m_1}{}_{\ell_1}[x] \to 1$, तथा इस दशा में

$$f(x) = H^{0,n_2:(m',n');(m'',n'')}_{p_2' q_2:[p',q']:[p'',q'']}\left[\begin{matrix}(a_{2j},\alpha_{2j}',\alpha_{2j}'')_{1,p_2}:(a_j',\alpha_j')_{1,p};\\(b_{2j};B_{2j}',\beta_2'')_{1,q_2}:(b_j',\beta_j')_{1,q};\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(a_j'',\alpha_j'')_{1,p''}\\(b_j'',\beta_j'')_{1,q''}\end{matrix}\ \middle|\ \xi_1(1-x)^{\mu_1}(1+x)^{\mu_1'}, \xi_2(1-x)^{\mu_2}(1+x)^{\mu_2'}\right]$$

$$H^{0,n_4:(m^{(3)},n^{(3)});(m^{(4)}n^{(3)})}_{p_4,q_4:[p^{(3)},q^{(3)}];[p^{(4)},q^{(4)}]}\left[\begin{matrix}(a_{4j};\alpha_{4j}^{(3)})_{1,p_4}:(a_j^{(3)},\alpha_j^{(3)})_{1,p}(3)\\(b_{4j};\beta_{4j}^{(3)})_{1,q_4}:(b_j^{(3)},\beta_j^{(3)})_{1,q}(3)\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(a_j^{(4)},\alpha_j^{(4)})_{1,p}(4)\\(b_j^{(4)},\beta_j^{(4)},)_{1,q}(4)\end{matrix}\right|\xi_3(1-x)^{\mu_3}(1+x)^{\mu_3'}\ \xi_4(1-x)^{\mu_4}\ (1'+x)^{\mu_4'}\Bigg]$$

इस दशा का ताप वितरण निम्न के द्वारा दिया जाता है-

$$V(x,t)=\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{n}\frac{(-1)^N(n!)^2(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+N+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\ \Gamma(\beta+n+1)N!\Gamma(n-N+1)\Gamma(\alpha+N+1)}$$

$$\exp\{-kn(n+++1)t\}\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$I^{0,n_2:0,n_4+2:(m',n');\ldots;(m^{(4)},n^{(4)})}_{P_2,q_2:P_4+2,q_4+1:[p',q'];\ldots;[p^{(4)},q^{(4)}]}$$

$$\left[\begin{matrix}(a_{2j};\alpha_{2j}',\alpha')_{1,p_2}:(-\alpha-N,\mu_1,\ldots,\mu_4)\\(b_{2j};\beta_{2j}',\beta_{2j}'')_{1,q_2}:(b_{4j};0,0,\beta_{rj}^{(3)},\beta_{4j}^{(4)})_{1,q_4}\end{matrix}\right.$$

$$(-\beta;\mu_1',\ldots,\mu_4'),(a_{4j};0,0,\alpha_{4j}^{(3)},\alpha_{4j}^{(4)})_{1,p_4}:(a_j',\alpha_j')_{1,p'};$$

$$(-\alpha-\beta-N-1,\mu_1+\mu_1',\ldots,\mu_4+\mu_4');(b_j',\beta_j')_{1,q'};$$

$$\left.\begin{matrix}\ldots;(a_j^{(4)},\alpha_j^{(4)})_{1,p}(4)\\\ldots;(a_j^{(4)},\beta_j^{(4)})_{1,q}(4)\end{matrix}\right|\xi_1\cdot2^{\mu_1+\mu_2'},\ldots\xi_4\cdot2^{\mu_4+\mu_4'}\Bigg] \qquad (1.20)$$

बशर्ते कि (1.14) में दिये गये उपयुक्त प्रतिबन्ध r = 4 के लिये तुष्ट होते हों।

निर्देश

1. कार्सला, एच० एस० तथा जीगर, जे० सी० : Conduction of heat in solids. क्लैरेंडन प्रेस आक्सफोर्ड, 1947, पृष्ठ 127.

2. एर्डेल्यी, ए० : Tables of integral transforms, भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954, 284 (3).

3. प्रसाद, वाई० एन० : पी-एच०डी० थीसिस, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय 1969

4. श्रीवास्तव, एच० एम० : Indian J. Math., 1972, 14, 1-6.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 1, January, 1998.

अष्टि के रूप में परावलीय सिलेन्डर फलन वाले संवलन समाकल समीकरण का प्रतिलोमन

नीतू जोशी

गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरिंग महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त-अक्टूबर 15, 1997]

सारांश

समाकल समीकरण के लिये, जिसमें परावलीय सिलेन्डर फलनों को अष्टि के रूप में प्रयुक्त किया गया है, प्रतिलोमन समाकल प्राप्त किये गये हैं। प्रस्तुत हल में प्राचलों की विशिष्ट संख्या लेने पर गुप्ता[3] द्वारा स्थापित हल की प्राप्ति की जा सकती है।

Abstract

On the inversion of convolution integral equations involving parabolic cylinder function as the kernel. *By* Nitu Joshi, Department of Mathematics, Govt. Engg. College, Ujjain (M.P.)

The integral equations with parabolic cylinder functions as the kernel have been inverted. The solution embodies the results of Gupta[3] for particular values of the parameters.

1. प्रस्तावना

कुल संवलन प्रकार के समाकल समीकरणों का प्रतिलोमन विडर[6] द्वारा प्रस्तावित विधि से निकाला जा सकता है। गत कुछ वर्षों में इसी विधि का उपयोग करते हुए समाकल समीकरणों का हल, जिनकी अष्टि अधिक सार्वीकृत हो अथवा उनका हल सार्वीकृत हो अध्ययन अनेक शोध-कर्ताओं ने किया है [1, 4, 5]।

ऐसे ही एक शोधपत्र में गुप्ता [3] ने परावलीय सिलेन्डर फलनों की अष्टि वाले समाकल समीकरणों के हल प्रस्तुत किए हैं। परिणामों को अलग-अलग प्रमेय द्वारा दर्शाया गया है।

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य भी उसी अष्टि वाले समाकल समीकरणों का हल प्रस्तुत करना है जो अधिक सार्वीकृत हो। प्राचलों के विशिष्टीकरण से गुप्ता[3] द्वारा स्थापित परिणामों की प्राप्ति की जा सकती है।

यदि

$$\int_0^\infty \exp(-pt)\cdot f(t)\,dt = F(p), Re p > 0 \tag{1.1}$$

तो $F(p)$ को $f(t)$ का परिवर्त कहते हैं और इसे हम संकेतात्मक रूप में $f(t) \doteqdot F(p)$ द्वारा अंकित करेंगे।

एर्डेल्यी [2; pp 129, 131, 144, 210] द्वारा ज्ञात निम्न परिणामों का आवश्यकतानुसार बाद में उपयोग किया जावेगा।

$$f^n(t) \doteqdot p^n F(p) \tag{1.2}$$

यदि $f(O) = f^1(0) = \ldots = f^{n-1}(O) = 0$

$$e^{-at} f(t) \doteqdot F(p+a) \tag{1.3}$$

$$f(at) \doteqdot \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \tag{1.4}$$

$$\int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\,du = F_1(p)\cdot F_2(p) \tag{1.5}$$

जहाँ

$$f_1(t) \doteqdot F_1(p) \text{ और } f_2(t) \doteqdot F_2(p) \tag{1.5}$$

$$t^{1/2} D_{2n}(2t)^{1/2} \doteqdot (-2)^n \sqrt{n+1/2}\,(p-1/2)^n (p+1/2)^{-n-1/2}, \text{Re}\, p > -1/2 \tag{1.6}$$

$$D_{2n+1}(2t)^{1/2} \doteqdot (-2)^n \sqrt{n+3/2}\,(p-1/2)^{-n-3/2}, \text{Re}\, p > -1/2 \tag{1.7}$$

और

$$t^{\gamma-1}\, {}_1F_1(\alpha;\gamma;\lambda t) \doteqdot \sqrt{\gamma}\, p^{\alpha-\gamma}(p-\lambda)^{-\alpha}$$

$$Re\, p>0, \mathrm{Re}\,\gamma>0, \mathrm{Re}\,\lambda>0 \tag{1.8}$$

जहाँ $D_{2n}(t), D_{2n+1}(t)$ परावलीय सिलेन्डर फलन तथा ${}_1F_1(\alpha;\gamma;t)$ संगमी हाइपरज्यामितीय फलन है ।

(1.3) एवं (1.4) के प्रयोग से (1.6) और (1.7) को निम्नानुसार परिवर्तित किया जा सकता है।

$$\exp(1/2\, a t)(2at)^{1/2} \doteqdot a^{+1/2}(-2)^n \sqrt{(n+1/2)}\,(p-a)^n p^{-n-1/2} \tag{1.9}$$

$$\exp(1/2\, a t)\, D_{2n+1}(2at)^{1/2} \doteqdot (-2)\, a^{3/2} \sqrt{n+3/2}\,(p-a)^n p^{-n-3/2} \tag{1.10}$$

एक सर्वज्ञात फल

$$(D+a)f(y) = \exp(-ay)\frac{d}{dy}[\exp(ay)f(y)] \tag{1.10}$$

प्रमेय I : यदि

(i) n, β और 2ρ शून्य सहित धनात्मक पूर्णांक हैं जहाँ $n>\beta, 2\rho$

(ii) $f^{n+2\rho+1}(x)$, $\sim 0 \le\ < x_1 < \infty$ में खंडशः संतत हो और,

(iii) $f^k(0)=0$ जहाँ $k = 0, 1, 2, \ldots .(n+2\rho)$

तो समाकल समीकरण

$$\int_0^x \exp\left[\frac{1}{2}a(x-t)\right][a(x-t)]^{-1/2} D_{2n}[2a(x-t)]^{1/2} g(t)\,dt = f(x) \tag{2.1}$$

का हल होगा

$$g(t) = A\int_0^t (t-y)^{n+\rho-1}\, {}_1F_1[n+\beta; n+\rho; a(t-y)]\cdot$$
$$[D^{n+\rho-\beta+1/2}(D-a)^{\beta} f(y)]\,dy \tag{2.2}$$

जहाँ

$$A = a^{-1/2}(-2)^{-n}/\sqrt{n+1/2}\,\sqrt{n+\rho} \tag{2.3}$$

उपपत्ति : माना कि

$$f(t) \doteqdot F(p) \text{ और } g(t) = G(p)$$

समीकरण (2.1) का लाप्लास परिवर्त लेने और (1.5) के प्रकाश में (1.9) को व्यवहृत करने तथा प्राप्त फल को पुनः व्यवस्थित करने पर

$$G(p) = A\left[\frac{\sqrt{n+\rho}\,(p^{n+\beta}) - (n+\rho)}{(p-a)^{n+\beta}}\right] p^{n+\rho-\beta+1/2}(p-a)^{\beta} F(p) \qquad (2.4)$$

अन्त में (2.4) का (1.8) के प्रकाश में लाप्लास प्रतिलोमन से वांछित फल (2.2) प्राप्त होता है।

प्रमेय II : यदि

(i) n, β और 2ρ शून्य सहित धनात्मक पूर्णांक हैं जहाँ $n > \beta, \rho$

(ii) $f^{n+2\rho+3}(x)$, $0 \le x < x_1 < \infty$ में खंडशः सतत हैं और

(iii) $f^k(0) = 0$ जहाँ $k = 0, 1, (n+2\rho+2)$

तो समाकल समीकरण

$$\int_0^x \exp\left[\frac{1}{2}a(x-t)\right] D_{2n+1}[2a(x+1)]^{1/2} g(t)\,dt = f(x) \qquad (2.5)$$

का हल होगा :

$$g(t) = B\int_0^t (t-y)^{n+\rho-1}\,{}_1F_1[n+\beta; n+\rho; a(t-y)] \cdot$$

$$[D^{n+\rho-\beta+3/2}(D-a)^{\beta} f(y)]\,dy \qquad (2.6)$$

जहाँ

$$B = \frac{(-2)^{-n} a^{-3/2}}{\sqrt{n+3/2}\,\sqrt{n+\rho}} \qquad (2.7)$$

उक्त प्रमेय को भी प्रमेय I की तरह आसानी से सिद्ध किया जा सकता है।

उपप्रमेय : प्रमेय I एवं प्रमेय II में $a=1, \beta=0$ और $\rho = 1/2$ रखने पर (1.10) के प्रयोग से गुप्ता[3] द्वारा स्थापित प्रमेय I एवं प्रमेय II को प्राप्त किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिका डॉ० बी० के० जोशी की आभारी है जिन्होंने इस शोध-पत्र की अवधि में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. छाबड़ा एस० पी० तथा जोशी, बी० के० : The Mathematics Student 1977, 1, 18-20
2. एर्डेल्यी, ए० : Tables of Integral Transforms, Vol I, McGraw Hill, Publications, N.Y., 1954.
3. गुप्ता, एच० एल० : **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका** 1976, 19(1), 51-56
4. जोशी बी० के० : Ind. J. Pure & App. Math, 1974, 5 (10), 933-35
5. खसिया, के० सी० : Mathematics Japonicae, 1966, 2 (1)
6. विडर, डी० वी० : Amer Math. Monthly 1963, 70 (3), 293-97.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 1, January, 1998.

अष्टि के रूप में एक चर वाले H-फलन से युक्त संवलन रूप वाला एक समाकल समीकरण

वी० सी० नायर

गणित विभाग, रीजनल इंजीनियरी कालेज, कालीकट

तथा

टी० एम० वासुदेवन नम्बिसन

गणित विभाग, एम० ए० एस० कॉलेज, कन्हनगड, केरल

[प्राप्त-जुलाई 12, 1993]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य अष्टि के रूप में एक चर वाले H-फलन से युक्त संवलन रूप वाले एक समाकल समीकरण को हल करना है। इसके द्वारा श्रीवास्तव तथा बुशमैन([8] pp 33-34) द्वारा दिये गये परिणाम का सार्वीकरण होता है। कुछ अन्य विशिष्ट दशाएँ भी दी गई हैं।

Abstract

An integral equation of convolution form with the H-Function of one variable as its kernel. *By* V. C. Nair, Department of Mathematics, Regional Engineering College, Calicut (Kerala) and T. M. Vasudevan Nambisan, Department of Mathematics, N.A.S. College, Kanhangad, Kerala.

The object of this paper is to solve an integral equation of convolution form having the H-function of one variable as its kernel. It generalizes the result given by Srivastava and Buschman ([8], pp. 33-34). A few other special cases are also given.

1. परिभाषाएँ तथा प्रयुक्त परिणाम

फाक्स ([3], p.408) द्वारा परिभाषित एक चर का H-फलन है-

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x \left| \begin{matrix}((a_p, A_p)) \\ ((b_q, B_q))\end{matrix}\right.\right] = \frac{1}{2\pi i_L} \int \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - B_j s) \prod_{j=l}^{n} \Gamma(1 - a_j + A_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + B_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - A_j s)} x^s \, d s \quad (1.1)$$

जहाँ $x = 0$, एक रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है, p, q, m तथा n पूर्णांक हैं जो $O \leq m \leq q, O \leq n \leq p$, की तुष्टि करते हैं, सारे A तथा B धन असली संख्याएँ हैं, सारे a तथा b ऐसी संकुल संख्याएँ हैं, कि $\Gamma(b_j - B_j s), (j = 1, \ldots, m)$, का कोई भी पोल $\Gamma(1 - a_j + A_j s)$, $(J = 1, \ldots n)$ के किसी पोल से मेल नहीं करता तथा कंटूर $\sigma + i\infty$ से $\sigma - i\infty$ तक इस तरह विस्तीर्ण है कि $\Gamma(b_j - B_j s), (j = 1, .., m)$ के पोल L के दाई ओर हों तथा $\Gamma(1 - a_j + A_j s), (j = 1, \ldots, n)$ के पोल बाईं ओर । $((a_p, A_p))$ संक्षेपण p प्राचलों के अनुक्रम को व्यक्त करते हैं जिससे

$$((a_p, A_p)) = (a_1, A_1), (a_2, A_2, (\ldots), (a_p, A_p).$$

बाक्समा ([1], pp.245-346) ने सिद्ध किया है कि (1.1) के दाई ओर का समाकल अभिसारी होता है जब $\theta > 0$ तथा

$$| \arg x | < \frac{\theta n}{2},$$

जहाँ

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} (A_j) - \sum_{j=n+1}^{p} (A_j) + \sum_{j=1}^{m} (B_j) - \sum_{j=m+1}^{q} (B_j) \quad (1.3)$$

उसने यह भी सिद्ध किया है कि (1.1) x के एक वैश्लेषिक फलन के रूप को प्रदर्शित करता है जब

$$\sum_{j=1}^{q} (E_j) - \sum_{j=1}^{P} (A_j) > 0, x \neq 0 \quad (1.4)$$

लाप्लास रूपान्तर

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} (f(t) \, dt, \mathrm{Re}(s) > 0 \quad (1.5)$$

को $F(s) = f(t)$ द्वारा दर्शाते हैं।

एर्डेल्यी ([2], pp. 129-131)

यदि $f(t) \doteq F(s), f(O)=f'(O)=\ldots=f^{n-1)}(O)=O$ तथा $f^{n)}(t)$ संतत हो तो $f^{n)}(t) \doteq s^n F(s)$.

$$ \tag{1.6} $$

यदि $f_1(t) \doteq F_1(s)$ तथा $f_2(t) \doteq F_2(s)$

तो

$$\int_0^t f_1(u)\,(t-u)\,du \doteq F_1(s)\,F_2(s) \tag{1.7}$$

$$t^m \doteq \Gamma(m+1)\,s^{-m-1},\ \mathrm{Re}(s) > O, m > O \tag{1.8}$$

नायर ([6], p.10)

$$t^{\alpha}\,{}_1\Psi_1[(d,1+\alpha,b);ct^b] \doteq \Gamma(d)\,s^{-1-\alpha}(1+cs^{-b-d}), \tag{1.9}$$

बशर्ते कि $\mathrm{Re}(s) > 0, 2 > b > 0, \mathrm{Re}(1+\alpha) > 0$ तथा

$$|\arg c s^{-b}| < \pi\left(\frac{2-b}{2}\right)$$

श्रीवास्तव ([8], pp. 18-19)

$$H^{1,p}_{p,q+1}\left[x \left| \begin{matrix} ((1-a_j,1)) \\ (0,1),((1-b_j,B_j)) \end{matrix}\right.\right] = \prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)\left[\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)\right]^{-1}$$

$$\times\ {}_pF_q[(a_p);(b_j);-x]. \tag{1.10}$$

$$H^{1,p}_{p,q+1}\left[-x \left| \begin{matrix} ((1-a_j,A_j)) \\ (0,1),((1-b_j,B_j)) \end{matrix}\right.\right] = {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}((a_j,A_j)); \\ ((b_j,B_j));\end{matrix}\ x\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_j r)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_j r)}\,\frac{x^r}{r!} \tag{1.11}$$

मुहम्मद ([5], p. 104, (4.3.11))

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}[ax+b(1-x)]^{-\alpha-\beta}\, {}_r\psi_s \mid ((m_r, M_r)) ; n_s, N_s)) ;$$

$$z(ax)^{\rho}\ \{b(1-x)\}^{\sigma} \Big| \{ax+b(1-x)\}^{\rho+\sigma}\Big]$$

$$H^{m,n}_{p,q}\ [Y(ax)^{\lambda}\{b(1-x)\}^{\mu}\ \big|\{(ax+b(1-x)\}^{\lambda+\mu}\big| \begin{matrix}((a_p, A_p))\\ ((b_q, B_q))\end{matrix}\Big] dx$$

$$= a^{-\alpha} b^{-\beta} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{r} \Gamma(m_j+M_j u)}{\prod_{j=1}^{s} \Gamma(n_j+N_j u)} \frac{z^u}{u!}\ H^{m,n+2}_{p+2,q+1}$$

$$\left[y \left| \begin{matrix} (1-\alpha-u\rho, \lambda), (1-\beta-u\sigma, \mu), ((a_p, A_p)) \\ ((b_q, B_q)), (1-\alpha-\beta-u\rho-u\sigma, \lambda+\mu \end{matrix} \right. \right] \tag{1.12}$$

बशर्ते

$$| \arg y | < \frac{1}{2}\pi\theta, \theta > 0, \mathrm{Re}(\alpha+\lambda b_j | B_j) > 0,$$

$$\mathrm{Re}(\beta+\mu b_j | B_j) > 0, (j = 1, \ldots, m), 1 + \sum_1^s N_j - \sum_1^s N_j - \sum_1^r M_j > 0,$$

$\rho, \sigma, \lambda, \mu > 0\ ax+b(1-x) \neq 0$ क्योंकि $0 \le x \le 1$, $a, b \neq 0$

तथा θ (1.3) में परिभाषित है।

हमें ज्ञात है

$$\int_0^1 x^{m-1}\ (1-x)^{n-1}\, dx\ \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.\ \mathrm{Re}(m) > 0$$

$$\mathrm{Re}(n) > 0. \tag{1.13}$$

श्रीवास्तव ([8], p.15)

$$\int_0^{\infty} x^h\ e^{-sx}\ H^{m,n}_{p,q}\left[z x^{\sigma} \left| \begin{matrix} ((a_p, A_p)) \\ ((b_q, B_q)) \end{matrix} \right. \right] dx = s^{-h-1} \tag{1.14}$$

$$H_{p+1,q}^{m,n+1}\left[zx^{-\sigma}\left|\begin{matrix}(-h,\sigma),((A_p,A_p))\\((b_q,B_q))\end{matrix}\right.\right],$$

जहाँ $\text{Re}(s)>0,\sigma>0;\theta>0,|\arg z|<\frac{1}{2}\theta\pi$ तथा

$\text{Re}(h+1+\sigma b_j|B_j)>0, j=1,\ldots,m$

स्किबिंस्की ([7], p. 127, (1.8))

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}((a_p,A_p))\\((b_q,B_q))\end{matrix}\right.\right]=\sum_{h=1}^{m}\,'\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1,j\neq h}^{m}\Gamma(b_j-B_j(b_h+v)|B_h]}{\prod_{j=m+1}^{\sigma}\Gamma(1-b_j+B_j(b_h+v)|B_h]} \tag{1.15}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+A_j(b_h+v)/B_h]}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma[a_j-A_j(b_h+v)/B_h]}\;\frac{(-1)^v\,z^{(b_h+v)/B_h}}{v!\,B_h}$$

2. समाकल समीकरण

संवलन (Convolution) समीकरण

$$g(t)=A\sum_{r=0}^{\infty}\Gamma(d+r)\frac{z^r}{r!}\int_0^t(t-u)^{a+br}H_{p+1,q+1}^{1,n+1}$$

$$\left[(t-u)\left|\begin{matrix}(1-\alpha,1),(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(0,1),(b_2,B_2),\ldots,(b_q,B_q),(-a-br,1)\end{matrix}\right.\right]f(u)\,du \tag{2.1}$$

का हल

$$f(t)=B\sum_{r=0}^{\infty}\Gamma(-d+r)\frac{z^r}{r!}\int_0^t(t-u)^{h-a+br-k-2}V(t-u)[D^h g(u)]\,du, \tag{2.2}$$

से मिल जाता है बशर्ते $2>b>0$, $\text{Re}(1+a)>0$, $AB\Gamma(d)\,\Gamma(-d)=1$,

$\text{Re}(h-a+k-1)>0$, $\text{Re}(\alpha)>0, f^{(q)}(0)=0$ क्योंकि $0\leq q<h$; q, h पूर्णांक हैं (h यादृच्छिक), $D=d/du$ तथा (2.1) में आये एक चर वाले H-फलन के प्राचलों पर अन्य उपयुक्त

प्रतिबन्धों सहित। (अभिसरण के प्रतिबन्धों के सेट (1.2) तथा (1.3) से सरलता से प्राप्त किया जा सकता है।)

जहाँ

$$V(u)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{C_\lambda\ u^\lambda}{\Gamma(h-k-a+br+\lambda-1)} \tag{2.3}$$

$$C_\lambda=(-1)^\lambda(c_k)^{-\lambda-1}\ \det$$

$$\begin{bmatrix} c_{k+1} & c_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{k+2} & c_{k+1} & c_k & 0 & \dots & 0 \\ c_{k+} & c_{k+\lambda+1} & . & . & \dots & c_{k+1} \end{bmatrix},$$

$$c_0=\frac{1}{c_k}, \tag{2.4}$$

$$c_\nu=\frac{(-1)^\nu\ \Gamma(\alpha+\nu)\ \pi_{j=1}^{n}\ \Gamma(1-a_j+A_j\nu)}{\pi_{j=2}^{q}\Gamma(1-b_j+B_j\nu)\ \pi_{j=1}^{p}\Gamma(a_j-A_j\nu)\ \nu!}, \tag{2.5}$$

k न्यूनतम ν का द्योतन करता है जिसके लिए $C\nu\neq 0$

उपपत्ति

माना $f(t)\doteq(F(s)$ तथा $g(t)\doteq G(s)$

(1.14) तथा (1.15) के प्राचलों के विशिष्टीकरण से

$$t^{\alpha-1}\ H_{p,q}^{1,n}\left[t\ \middle|\ \begin{matrix}(a_1,A_1)\dots,(a_p,A_p)\\(0,1),(b_2,B_2),\dots,(b_q,B_q)\end{matrix}\right]=s^{-\alpha}\ H_{p+1,q}^{1,n+1}$$

$$\left[s^{-1}\ \middle|\begin{matrix}(1-\alpha,1),(a_1,A_1),\dots,(a_p,A_p)\\(0,1),(b_2,B_2),\dots,(b_q,B_q)\end{matrix}\right] \tag{2.6}$$

(2.6) का दक्षिण पक्ष

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\nu)\ \pi_{j=1}^{n}\ \Gamma(1-a_j+A_j\nu)\ (-s^{-1})^\nu}{\pi_{j=2}^{q}\ \Gamma(1-b_j+B\nu)\ \pi_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-A_j\nu)\ \nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu s^{-\nu},$$

जो $(-s^{-1})$ का वैश्लेषिक फलन है।

$$= s^{-k} \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu+k}\, s^{-\mu}, c_k \neq 0 \text{ सहित} \tag{2.7}$$

जहाँ k न्यूनतम ν का द्योतन करता है जिसके लिए $C\nu \neq 0$ । चूँकि $C_k \neq 0$, अतः

$$\left[\sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu\neq k}\, s^{-\mu}\right]^{-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \subset_\lambda s^{-\lambda} \tag{2.8}$$

लिखने पर दाहिना पक्ष $|s^{-1}| < \varepsilon$ के लिये अभिसारी होता है।

(2.6) तथा (2.7) से

$$t^{\alpha-1} H_{p,q}^{1,n}\left[t \left| \begin{matrix} (a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p) \\ (0,1),(b_2,B_2),\ldots,(b_q,B_q) \end{matrix} \right.\right].$$

$$\doteq s^{-\alpha-k} \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu+k} s^{-\mu} \tag{2.9}$$

(1.8) का प्रयोग करने पर

$$t^{h-k-\alpha-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{C_\lambda t^\lambda}{\Gamma(h-k+\lambda-\alpha)} \doteq s^{-h+k+\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_\lambda s^{-\lambda} \tag{2.10}$$

(1.9) से

$$t^{a-\alpha}\, {}_1\psi_1 \left[(d,1),(a-\alpha+1,b),zt^b\right] \doteq \Gamma(d)\, s^{-1-a+\alpha}(1-zs^{-b})^{-d} \tag{2.11}$$

$$t^{\alpha-a-2}\, {}_1\psi_1\left[(-d,1),(\alpha-a-1,b),zt^b\right] \doteq \Gamma(-d)\, s^{1+a-\alpha}(1-zs^{-b})^{d} \tag{2.12}$$

(1.7) में (2.9) तथा (2.11) का प्रयोग करने पर

$$\Gamma(d)\, s^{-1-a+\alpha}\left(1-zs^{-b}\right)^{-c} s^{-\alpha-k}\left[\sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu+k}\, s^{-\mu}\right]$$

$$\doteq \int_0^t u^{a-\alpha}\, {}_1\psi_1\Big[\,(d,\ 1),\ (a-\alpha+1,\ b\,),\ z\,u^b\Big](t-\mu)^{\alpha-1}$$

$$\times\, H^{1,\,n}_{p,\,q}\left[(t-u)\,\middle|\,\begin{matrix}(a,\ A_1\,),\ldots,(a_p,\ A_p\,)\\ (0,\ 1),\ (b_2,\ B_2),\ldots,(b_q,\ B_q\,)\end{matrix}\right]du. \qquad (2.13)$$

निम्नांकित की प्राप्ति हेतु (2.13) में $u = t\,v$ रखें तथा (1.12) की सहायता से मान निकालें।

$$\Gamma(d\,)\,s^{-1-a-k}\Big(1-z\,s^{-b}\Big)^{-d}\left[\sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu+k}\ s^{-\mu}\right]$$

$$\doteq \sum_{r=0}^{\infty}\Gamma(d+r\,)\frac{z^r}{r\,!}\,t^{\,a+br}$$

$$\times\, H^{1,\,n+1}_{p+1,\,q+1}\left[\,t\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\alpha,\,1\,),(a_1+A_1\,),\ldots,(a_p,\ A_p\,)\\ (0,\ 1),\ (b_2,\ B_2),\ldots,(b_q,\ B_q\,),(-\,a-br,\,1)\end{matrix}\right] \qquad (2.14)$$

(1.7) में (2.10) एवं (2.12) का प्रयोग करने पर

$$\Gamma(-\,d\,)\,s^{\,1+a-\alpha}\Big(1-z\,s^{-b}\Big)^{-d}\,s^{\,k+\alpha-h}\left[\sum_{\mu=0}^{\infty} C_\lambda\,s^{-\lambda}\right]$$

$$\doteq \int_0^t u^{\,\alpha-a-2}\,{}_1\psi_1\Big[\,(-\,d,\ 1),\ (\alpha-a-1,\ b\,),\ z\,u^b\Big](t-u\,)^{\,h-k-\alpha-1}$$

$$\times\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{C_\lambda\,(t-u\,)^\lambda}{\Gamma(h-k+\lambda-\alpha\,)}\ d\,u. \qquad (2.15)$$

अब (1.11) का प्रयेग करके राइट के सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन कों श्रेणी रूप में विस्तार दें, $\mu = t\,\nu$ रखें तथा निम्नांकित की प्राप्ति के लिये (1.13) की सहायता से मान निकालें।

$$\Gamma(-\,d\,)\,s^{\,k-h+a+1}\left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} C_\lambda\,s^{-\lambda}\right]\doteq \sum_{r=0}^{\infty}\Gamma(-\,d+r)\frac{z^r}{r\,!}\,t^{\,h-k+br-a-2}$$

$$\times \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{C_{\lambda} t^{\lambda}}{\Gamma(br+\lambda+h-k-a-1)} \tag{2.16}$$

(2.14) का प्रयोग करने पर समाकल समीकरण (2.1) निम्नवत् बन जाता है।

$$G(s) = A\,\Gamma(d)\, s^{-1-a+k}\left(1-z s^{-b-d}\right)\left[\sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu+k}\, s^{-\mu}\right] F(s). \tag{2.17}$$

(2.16) के प्रयोग से समाकल समीकरण (2.2) निम्नवत् बन जाता है

$$F(s) = B\,\Gamma(-d)\, s^{k+a+1}\left(1-z s^{-b}\right)^{d}\left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} C_{\lambda} s^{-\lambda}\right] G(s). \tag{2.18}$$

(2.17) एवं (2.18) समीकरणों को एक दूसरे से प्राप्त किया जा सकता है जब $A\,B\,\Gamma(d)$ $\Gamma(-d) = 1$अतः लर्च के प्रमेय ([4],p.5) से यह निकलता है कि (2.1) तथा (2.2) में से प्रत्येक समाकल समीकरण दूसरे का हल है।

3. **विशिष्ट दशाएँ**

निम्नलिखित परिणाम पाने के लिये (2.1) में n=p रखें।

समाकल समीकरण

$$g(t) = A \sum_{r=0} \Gamma(d+r)\, \frac{z^r}{r!} \int_0^t (t-u)^{a+br}$$

$$\times\; {}_{p+1}\Psi_q\left[\begin{matrix}(\alpha,\ 1),\ (1-a_1,\ A_1), \ldots, (1-a_p,\ A_p), \\ (1-b_2,\ 1), \ldots\ (1-b_q,\ B_q),\ (1+a+br,\ 1);\end{matrix}\ (u-t)\right] f(u)\, du \tag{3.1}$$

का हल निम्न के द्वारा दिया जाता है।

$$f(t) = B \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma(-d+r)\, \frac{z^r}{r!} \int_0^t (t-u)^{h-a+br-k}\, W(t-u)\,[D^h g(u)]\, du,$$

बशर्ते किं प्रमेय में सारे प्रतिबन्ध (3.1) में आयें राइट के सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन के प्राचलों वाले अन्य उपयुक्त प्रतिबन्धों सहित तुष्ट हो लें।

जहाँ

$$W(u) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{C_\lambda u^\lambda}{\Gamma(h-k-a+br+\lambda-1}, $$

C_λ को (2.4) से ज्ञात करते हैं।

$$C_v = \frac{\Gamma(1-\alpha+v) \overset{p}{\underset{j=1}{\pi}} \Gamma(a_j+A_j v)}{\overset{q}{\underset{j=2}{\pi}} \Gamma(b_j+B_j v)\ v\,!},$$

k से न्यूनतम v का द्योतन होता है जिसके लिये $C_v \neq 0$

यदि $(A_j) = (B_j) = 1$, तो (2.1) एक समाकल समीकरण बन जाता है जिसकी अष्टि के रूप में हाइपरज्यामितीय फलन निहित होता है। प्रमेय में $\alpha = \rho$, $a = \rho - 1$, $A = B = 1$, रखें $z \to 0$ बना लें तो श्रीवास्तव तथा बुशमैन ([8], pp. 33, 34) का परिणाम प्राप्त हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक रीजनल इंजीनियरी कालेज के प्राचार्य के कृतज्ञ हैं जिन्होंने आवश्यक सुविधाएँ प्रदान कीं।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० ए० : Compos. Math 1963, 15, 239-341.

2. एर्डेल्यी, ए० : Tables of integral transforms, भाग I, मैक्ग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क,1954

3. फाक्स, सी० : Trans. American Math. Soc, 1961, 98, 395-429.

4. मकलाचलान, एन० एन० : Laplace transform and their applications to differential equations डोवर पब्लिकेशन्स, न्यूयार्क, 1962.

5. मुहम्मद टी : पी-एच० डी० थीसिस, कालीकट विश्वविद्यालय

6. नायर, वी० सी० : Riv. Mat. Univ. Parma (U) 1975, I, 9-15

7. स्किबिस्की, पी० : Ann. Polon. Math. 1970, 23, 125-138.

8. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी० : The H-functions of one and two variables with applications साउथ एशियन पब्लिशर्स, नई दिल्ली, मद्रास

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख ''सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2''इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती
संस्थापक सम्पादक

Swami Satya Prakash Saraswati
Founder Editor

डॉ० चन्द्रिका प्रसाद
प्रधान सम्पादक

Dr. Chandrika Prasad
Chief Editor

डॉ० शिव गोपाल मिश्र
प्रबन्ध सम्पादक

Dr. Sheo Gopal Misra
Managing Editor

सम्पादन मण्डल

डॉ० एस० के० जोशी (भौतिकी)
भूतपूर्व महानिदेशक, सी० एस० आई० आर०
नई दिल्ली

Dr. S.K. Joshi (Physics)
Ex-Director General, C.S.I.R.
New Delhi

डॉ० आर० सी० मेहरोत्रा (रसायन)
एमेरिटस प्रोफेसर, रसायन विभाग,
राजस्थान विश्वविद्यालय

Dr. R.C. Mehrotra (Chemistry)
Emeritus Professor,
Rajasthan University

डॉ० डी० डी० पंत (वानस्पतिकी)
एमेरिटस साइंटिस्ट, इलाहाबाद वि० वि०

Dr. D.D. Pant (Botany)
Emeritus Scientist
Allahabad University

डॉ० एस० के० जैन (वानस्पतिकी)

Dr. S.K. Jain (Botany)

प्रो० आर० पी० रस्तोगी (रसायन)
एमेरिटस साइंटिस्ट, सी० डी० आर० आई०,
लखनऊ

Prof. R.P. Rastogi (Chemistry)
Emeritus Scientist, C.D.R.I.
Lucknow

प्रो० यू० एस० श्रीवास्तव (जीवविज्ञान)
अध्यक्ष, राष्ट्रीय विज्ञान अकादमी

Dr. U.S. Srivastava (Zoology)
President, N.A. Sciences
Allahabad

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 100 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 25 or 3£ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405

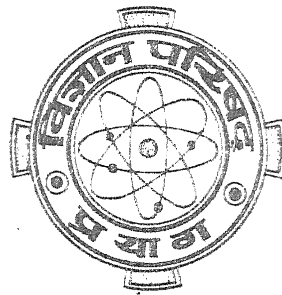
ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 41 April 1998 No. 2



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 41 April 1998 No. 2

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 2, April, 1998.

दिवि सूर्यसहस्रस्य

प्रो० देवेन्द्र शर्मा*

पूर्व कुलपति, गोरखपुर तथा इन्दौर विश्वविद्यालय
C-1038, रामसागर मिश्र नगर, लखनऊ -16

[प्राप्त—जनवरी 8, 1998]

लगभग दो वर्ष पूर्व मेरे दिल्ली प्रवास के दौरान श्री बी० पी० भार्गव, जो रेलवे में उच्चाधिकारी थे, मुझसे मेरे जामाता के निवास पर मिले। वे प्रो० सालिग्राम भार्गव के पौत्र (पुत्री के पुत्र) हैं तथा उनको पता चला था कि मैं उनके नानाजी का छात्र रहा हूँ। उन्होंने प्रोफेसर साहब को बचपन में ही देखा था तथा उनके सम्बन्ध में और जानने के बारे में उनकी जिज्ञासा इतनी प्रबल थी कि वे एक लम्बे समय तक चर्चा करते रहे।

18 जुलाई 1937 का वह दिन अनायास याद आता है जब इलाहाबाद विश्वविद्यालय में बी० एस-सी० प्रथम वर्ष के छात्र के रूप में पिताजी के पूर्व छात्र के साथ मुझे प्रोफेसर भार्गव के दर्शन करने का सौभाग्य प्राप्त हुआ। उन दिनों वे एक लम्बे, शायद एक वर्ष के अवकाश पर प्रयाग स्टेशन के दक्षिण पूर्व स्थित अपने बंगले पर ही मिले। उनका सरल और आत्मीयताभरा व्यवहार छू गया । उस सत्र के अन्त में जब प्रोफ़ेसर मेघनाद साह कलकत्ता चले गए तब भार्गव साहब ने विभागाध्यक्ष का दायित्व संभाला और सबसे छात्र, शोध छात्र और बाद में सहयोगी के रूप में उनसे बराबर सीखने का सौभाग्य प्राप्त होता रहा। वे सही अर्थों में एक सफल गुरू थे जिनसे कक्षा में प्राप्त ज्ञानार्जन के अतिरिक्त उनके आचरण से और भी अधिक सीखने को मिलता है। भौतिकी विभाग एक संयुक्त परिवार था जिसके वे मुखिया थे। उनके लिये कोई छोटा था न कोई बड़ा, सबके साथ एक व्यवहार।

यद्यपि भार्गव साहब ने डाक्टरेट की उपाधि नहीं ली थी, परन्तु उनके शोध का संदर्भ न केवल भारत में प्रकाशित पुस्तक वरन् इङ्गलैण्ड में प्रकाशित बार्टन रचित ध्वनिकी के ग्रन्थ में भी दिया गया था। जैसे प्रत्येक ऋतु में उनके वही धवल वस्त्र रहते थे वैसे ही उनका मन और व्यवहार, उनका भीतर और बाहर शुद्ध था।

---

* 19 नवम्बर 1997 को दिया गया प्रोफेसर सालिग राम भार्गव स्मृति व्याख्यान

सन् 1948 के मार्च की बात है। कहीं अचानक फटका लगाने (चिक उतरने) से कमर में ऐसी पीड़ा थी कि लेटने से उठने, बैठने से खड़े होने और इनके विपरीत क्रियाओं में हर दशा में कठिनाई थी। अतः विवश हो एक दिन के लिये अवकाश पर रहना पड़ा। विश्वविद्यालय मार्ग स्थित ऊपर के माले पर हमारा निवास था और मैं खुली छत (उस भाग के आँगन) पर चारपाई पर लेटा हुआ था कि सीढ़ियों पर किसी के चढ़ने की पदचाप सुनाई पड़ी। जब वे सज्जन ऊपर पहुँच गए तो मैं उन्हें देखकर ऐसा चौंका कि एक झटके में उठकर खड़ा हो गया। "हम जवानों के बीच में रहकर यह शर्मा बुड्ढा कैसे हो गया?" प्रोफ़ेसर भार्गव के शब्द थे। उनके विनोदी स्वभाव की और भी चर्चाएँ थीं। एक दिन एक सज्जन, जो भार्गव साहब को सामान्य रूप से ही पहचानते थे, उनके निवास पर मिलने गए। वहाँ पहुँच कर उन्होंने कमरे में बैठे वृद्ध सज्जन से पूछा कि प्रोफेसर साहब कहाँ हैं। प्रो० भार्गव ने खूँटी पर टँगी अपनी पगड़ी की ओर इशारा करते हुए बताया, "वहाँ" । कहने की आवश्यकता नहीं कि उनका साफ़ा उनकी स्थाई पहचान था।

जब कैनेडा की नैशनल रिसर्च काउन्सिल ने 1948 में अपने भर डाक्टरेट फैलोशिप के लिये विश्व भर में परिपत्र भेजकर आवेदन आमंत्रित किए तो मैंने प्रोफ़ेसर साहब से कहा कि जब भौतिकी और रासायनिकी में मिला कर उन्हें संसद भर से कुल एक दर्जन ही चुनने हैं तो चयन की संभावना नगण्य होने के कारण अभ्यर्थी होना बेकार है। उनका सहज उत्तर था, "कम से कम यह तो न हो कि प्रयाग विश्वविद्यालय से कोई आवेदक ही नहीं है।" और मेरे प्रपत्र के सथ संलग्न करने को उन्होंने अपने हाथ का लिखा एक वाक्य का संस्तुति पत्र मुझे दे दिया। आज भी स्मरण करता हूँ कि उस एक वाक्य में कितनी शक्ति थी।

हिन्दी में वैज्ञानिक विषयों पर लिखने में उन दिनों कठिनाई थी क्योंकि तब तक कोई सर्वमान्य शब्दावली नहीं थी। प्रो० फूल देवसहाय वर्मा और डॉ० निहाल करण सेठी, डॉ० गोरख प्रसाद और डॉ० सत्य प्रकाश द्वारा रचित कुछ पुस्तकें थीं। इस विषय पर प्रो० भार्गव का मत था कि प्रत्येक शब्द के रूप संस्कृत या हिन्दी के अनुसार होने चाहिए अन्यथा शब्दावली बहुत जटिल हो जायेगी। इस दृष्टि से प्रत्येक वैज्ञानिक शब्द का हिन्दी पर्याय बनाया जाता था। अब शब्दावली अधिक सहिष्णु है, परन्तु रूपान्तरण अपनी भाषा के अनुसार ही हो रहा है, यथा प्रिज्म का एक रूप प्रिज्मेटिक न हो कर प्रिज्मीय होगा। वे विज्ञान और विज्ञान परिषद् के संस्थापकों में से थे। प्रायः बताते थे कि जब सर सुन्दरलाल के पास मासिक विज्ञान पत्रिका पहुँचती थी तो वे हिन्दी में वैज्ञानिक साहित्य पाकर अपूर्व गर्व का अनुभव करते थे।

45 वर्ष पूर्व हमसे विदा ले चुके प्रो० सालिग्राम भार्गव से आज की पीढ़ी अनभिज्ञ है, परन्तु प्रयाग विश्वविद्यालय का भौतिकी विभाग, विज्ञान परिषद् और उनके शिष्य आज भी प्रत्यक्ष तथा परोक्ष रूप से उनके ऋणी है, उनसे सीख रहे हैं।

दिवि सूर्य सहस्रस्य

तम से ज्योति में जाने की आकांक्षा स्वभाविक है। तम की सीमा है, पर ज्योति असीम है,

आध्यात्मिक स्तर पर न सही, सामान्य भौतिक स्तर पर ज्योति को कैसे बढ़ाया जाय, तापीय उच्छृखङ्खलता लिये ज्योति नहीं, स्निग्ध ज्योति देखें।

सामान्य ताप पर अधिकांश अणु और परमाणु* अपनी मूल या निम्नतम अवस्था में रहते हैं क्योंकि ऊपर की अवस्थाओं में पहुँचने के लिये उसी प्रकार ऊर्जा चाहिए जैसे हमको ऊपर के माले तक पहुँचने में। अतः ऊपर के माले (अवस्था) की आबादी उससे नीचे की अवस्थाओं से सदा कम ही रही है। हाँ, यदि मूल अवस्था और उसके ऊपर की अवस्थाओं का अन्तर कम हो तो इन दोनों अवस्थाओं में पाये जाने वाले अणुओं की आबादी एक कोटि की तो हो सकती है परन्तु निचली अवस्था में फिर भी अधिक अणु होंगे। वस्तुतः यदि नीचे की अवस्था में संख्या n_1 और ऊपर की अवस्था में n_2 तथा उनकी ऊर्जाओं का अन्तर E_{21} हो तो

$$n_2 = n_1 e^{-E_{21}/kT} \tag{1}$$

होगा जहाँ k बोल्ट्जमान नियतांक तथा T परम ताप है।

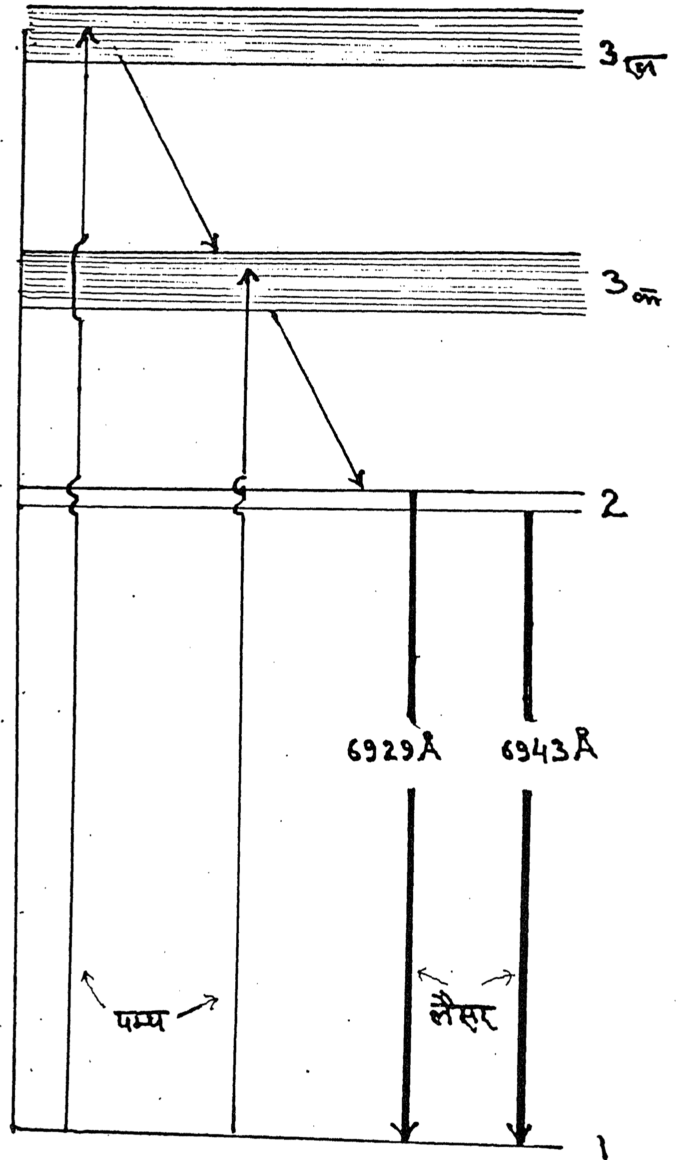
प्रत्यक्ष है कि n_2 सदैव n_1 से कम होगा। सन् 1915 में आइन्स्टाइन ने विकिरण के अवशोषण और उत्सर्जन का सिद्धान्त प्रतिपादित किया था। मोटे तौर पर इसके अनुसार दो अवस्थाओं 1 और 2 के बीच अवशोषण यदि $n_1 >> n_2$ नीचे की अवस्था में अणुओं की संख्या तथा आपतित विकिरण, जिसकी ऊर्जा सम्बन्धित दोनों अवस्थाओं के अन्तर के बराबर हो, के घनत्व पर निर्भर है। इसके विपरीत उत्सर्जन के दो भाग हैं:—

(1) स्वतः उत्सर्जन जो प्रत्येक अणु यादृच्छिक या स्वतंत्र रूप से करता है।

(2) विकिरण का घनत्व उत्सर्जन को उद्दीपित या प्रेरित करता है और सब अणु यह उत्सर्जन कला सम्बद्ध रूप से करते हैं। जहाँ यादृच्छिक क्रिया में प्रत्येक अणु द्वारा उत्सर्जित ऊर्जा तरंग के आयाम a के वर्ग के अनुपात में है, वही कला सम्बद्ध उत्सर्जन में सब आयामों के योग के वर्ग के अनुपात में है।

फलतः जहाँ पहली हालत में N अणुओं द्वारा उत्सर्जित ऊर्जा CNa^2 होगी वहीं कला सम्बद्ध उत्सर्जन में यह CN^2a^2 यानी N गुनी अधिक होगी। यह ज्ञातव्य है कि उद्दीपित उत्सर्जन के लिये यह आवश्यक है कि n_2 में n_1 की अपेक्षा अधिक अणु हों जिससे $n_2 \rightarrow n_1$ संक्रमण सम्भव हो सके, परन्तु हम देख चुके हैं, कि ताप बढ़ाने पर n_2 में वृद्धि तो हो सकती है लेकिन n_1 सदैव n_2 से अधिक होगा। अब इस समस्या का हल चाहिए यानी अवस्था 2 की आबादी अवस्था 1 से अधिक कर दी जाय यदि ऊर्जा के उपयुक्त विकिरण द्वारा परमाणुओं को अवस्था 1 से 2 में भेज दिया जाये तो यह सम्भव होगा, परन्तु यादृच्छिक उत्सर्जन के द्वारा समीकरण (1) के अनुसार निकाय साम्यावस्था में आ जाएगा और पुनः $n_1 > n_2$ होगा। ऐसी परिस्थिति में एक अद्वितीय हल सामने आता है। मान लीजिए

जहाँ अणु और परमाणु दोनों संदर्भित हैं वहाँ सामान्यतः अणु शब्द का ही उपयोग किया जाएगा ।



चित्र 1. लाल (रूबी) में लैसर क्रिया 'पम्प' ऊर्जा, क्रिस्टल के तापीय कम्पनों को दी गई ऊर्ज (तिरछे वाण) और लैसर संक्रमण दर्शाएँ गए हैं।

एक अणु की चित्र 1 के अनुसार तीन या चार अवस्थाएँ हैं, 1, 2 और $3_{क}$, $3_{ख}$ जिनकी ऊर्जाएँ E_1, E_2, $E_{3क}$ $E_{3ख}$ क्रमशः बढ़ती जाती हैं तथा 1 और 3 तक 3 और 2 के बीच संक्रमण हो सकते हैं, परन्तु 2 और 1 के बीच संक्रमण आंशिक रूप से वर्जित है। वस्तुतः अवस्था 2 आंशिक मितस्थाई कहलाती है जिसमें इलेक्ट्रॉन सामान्य अवस्थाओं (आयु 10^{-8} से०) की अपेक्षा संक्रमण के पूर्व लगभग एक हज़ार गुने अधिक समय (10^{-5} से०) तक रुकता है। यह चित्र मूल्यवान मणिभ लाल (रूबी) की अवस्थाओं का है। रूबी Al_2O_3 के क्रिस्टल में 0.04% Cr^{+3} के कारण गुलाबी आभा लिये हुए होता है। यदि हम इसको श्वेत प्रकाश से आलेखित करें तो यह स्पेक्ट्रम के नीले (अवस्था 3 ख) और हरे (अवस्था 3क) भागों का अवशोषण करेगा।

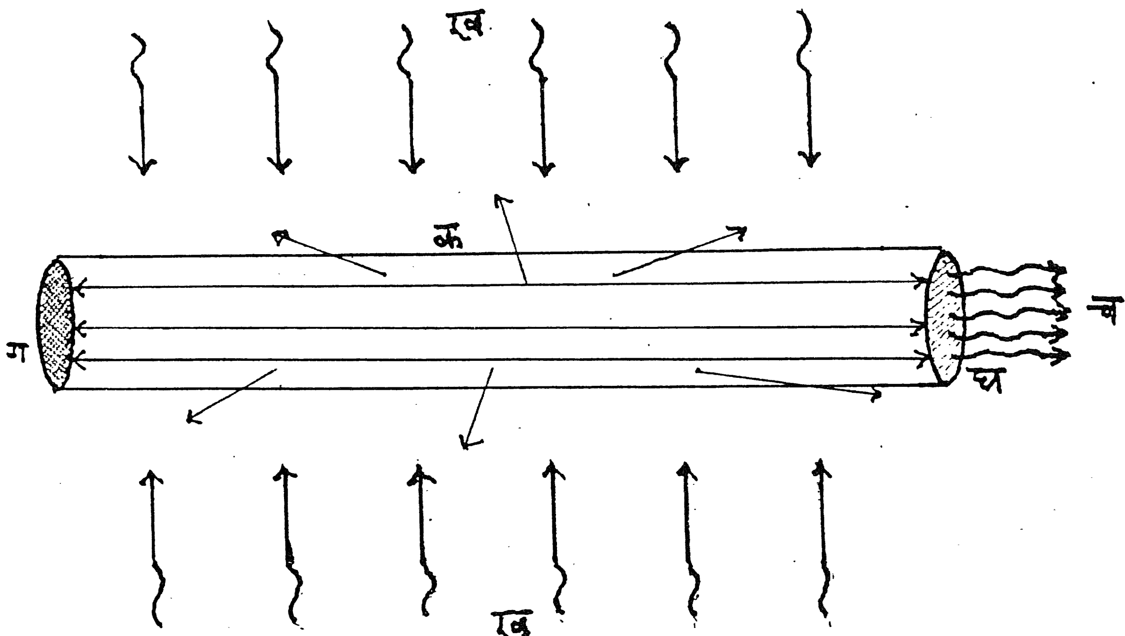
(ऊर्जा $E_{3ख} - E_1$ तथा $E_3 - E_1$) तथा शोषित ऊर्जा का कुछ भाग क्रिस्टल के तापीय कम्पनों (तिरछे तीर) को देते हुए Cr^{+3} आयन के उत्तेजित इलेक्ट्रॉन आंशिक मितस्थाई अवस्था 2 में जो द्विक है आकर उसकी आबादी का घनत्व अवस्था 1 से अधिक कर देंगे यानी दोनों अवस्थाओं की आबादी का प्रतिलोमन हो जायेगा। परिणामतः इलेक्ट्रॉन अवस्था 2 से 1 में आते हुए 6929 और 6943 Å के लाल रंग के प्रकाश का उत्सर्जन करेंगे, परन्तु यदि उस मितस्थाई अवस्था में रहते हुए परमाणु निकाय को कला सम्बद्ध उचित तरंग दैर्ध्य (6929 Å तथा 6943 Å) के घने घनत्व के प्रकाश से आलोकित किया जाय तो सभी इलेक्ट्रॉन एकसाथ, जैसे घने बादल एकसाथ मूसलाधार वर्षा करते हैं, निम्नतम अवस्था में आते हुए उन्हीं तरंगदैर्ध्य के प्रकाश का कला सम्बद्ध या उद्दीपित उत्सर्जन करेंगे।

अब प्रश्न उठता है कि विकिरण को सघन और कला सम्बद्ध कैसे बनाया जाय। इस सम्बन्ध में लगभग एक शताब्दी से उपयोग में आ रहे फ़ैब्री-पेरो व्यतिकरणमापी (इण्टरफ़ेरोमीटर) ने सहायता की। दो रजतित दर्पणों (जिनमें एक पूर्ण तथा दूसरा आंशिक रूप से रजतित है) के बीच में उस पदार्थ को जिससे उद्दीपित विकिरण प्राप्त करना है, रखा जाता है। इस पदार्थ पर दर्पणों के अक्ष के लम्बवत दिशा में ऐसा विकिरण डाला जा रहा है जो उसके अणुओं, परमाणुओं अथवा आयनों को ऐसी थिति में पहुँचा दे जहाँ से वे मितस्थायी अवस्था में आ सकें (चित्र 1 और 2)। इस हालत में जो विकिरण (संक्रमण $2 \rightarrow 1$ चित्र 1 में) अक्ष के समानांतर है वह दर्पणों द्वारा बहुल परावर्तित होकर सक्रिय पदार्थ में इतना सघन हो जाता है, कि अवस्था 2 में पहुँचे अणुओं को कला सम्बद्ध उद्दीपित उत्सर्जन के लिये प्रेरित कर दे।

उद्दीपित प्रकाश (विकिरण) प्राप्त करने के लिये जो आवश्यक व्यवस्था और क्रियाएँ हैं वे हैं

(1) सक्रिय पदार्थ,

(2) उस उदार्थ को एक ऊँची अवस्था में पहुँचाने के लिये ऊर्जा का स्रोत (पम्प ऊर्जा) जो कुछ उसी प्रकार कार्य करता है जिस प्रकार पम्प जल को ऊपर की किसी मंजिल तक पहुँचाती है। यह ऊर्जा का स्रोत विकिरण के स्थान पर वैद्युत क्षेत्र, ऊष्मा, गैसीय विसर्जन (Gaseous discharge), इलेक्ट्रॉन अन्तःक्षेपण (इंजेक्शन), रासायनिक क्रिया आदि हो सकते हैं।



चित्र 2. लैसर समुच्चय : क-सक्रिय माध्यम; ख-पम्प ऊर्जा (यहाँ विकिरण) : ग-पूर्ण रजतित दर्पण; घ- अर्द्ध रजतित दर्पणः च- उद्दीपित लैसर विकिरण।

नोट : यह चित्र मूलतः रूबी लैसर का है। अन्य लैसरों में ये सब भाग होते हैं, केवल उनके प्रकारों में अन्तर हो सकता है। जिस स्थान में बहुलित परावर्तन द्वारा प्रकाश के घन्त्व को बढ़ाया जाता है वह कोटर या कैविटी कहलाता है। चित्र में कोटर के अन्दर प्रकाश का संचरण किरणों के द्वारा दर्शाया गया है। जो किरणें दर्पणों के अक्ष के सामान्तरण नहीं हैं वे लैसर क्रिया में भागीदार नहीं होतीं।

(3) वह कोटर या गुहिका जो उद्दीपक विकिरण को कला सम्बद्ध और सघन बनाता है।

ठोस सक्रिय पदार्थ के छोर के सिरों को समानान्तर और समतल और रजतित करके स्वयं वह पदार्थ ही का कार्य करता है। द्रव और गैसों के लिये फ़ैब्री-पेरों इण्टरफ़ेरोमीटर जैसे दर्पणों को कोटर बनाने के लिये प्रयोग में लाया जाता है। यद्यपि सभी लैसर और मैसर भिन्न-भिन्न क्षेत्रों में विकिरण का प्रवर्धन करने के लिए पृथक प्रकार के उपकरण और व्यवस्था का उपयोग करते हैं उनमें ऊपर वर्णित तीनों बातों में एक सैद्धान्तिक समानता है।

अब तक जो चर्चा हुई उससे हम देखते हैं कि क्षीण प्रकाश का प्रवर्धन कैसे किया जा सकता है। इस सम्पूर्ण क्रिया को 'विकिरण के उद्दीपित उर्त्सजन द्वारा प्रकाश का प्रवर्धन' से व्यक्त किया जाता है जो अँग्रेजी में 'Light Amplification by Stimulated Emmision of Radiation' है। इन शब्दों के प्रथम अक्षरों से LASER शब्द बना है। लैसर की उपयोगिता कितने विस्तृत क्षेत्रों में है यह हम आगे देखेंगे। यदि विकिरण दृश्य प्रकाश न होकर माइक्रोवेव हो तो L के स्थान पर M आ जाता है तथा सम्पूर्ण व्यवस्था और उद्दीपित विकिरण मैसर (MASER) कहलाता है।

प्रचालन की दृष्टि से लैसरों को सामान्यतः दो श्रेणियों में रखा जा सकता है। उद्दीपित विकिरण के उत्सर्जन के पश्चात् सम्बन्धित दोनों अवस्थाओं की प्रतिलोमित आबादी पुनः साम्यावस्था के समीप पहुँचने लगती है और क्षणिक व्यवधान के पश्चात् पम्प क्रिया द्वारा उसे पुनः लैस कहने की अवस्था में पहुँचा दिया जाता है। अतः लैसर प्रायः स्पन्दित श्रेणी के होते हैं। रूबी लैसर इस प्रकार का है। स्पन्दन काल और उनकी आवृत्ति भिन्न-भिन्न होते हैं। स्पन्दन काल 10^{-2} से० से लेकर 10^{-9} तथा 10^{-12} से० तक होता है तथा स्पन्दनों की पुनरावृत्ति 10 करोड़ से लेकर एक अरब प्रति से० तक उपलब्ध है। यद्यपि लैसर दक्षता बहुत कम और उत्सर्जित ऊर्जा बहुत अधिक नहीं तथापि लैसर विकिरण को फ़ोकस करने पर उपलब्ध शक्ति बहुत हो जाती है —10^{10} से 10^{12} वाट प्रति वर्ग सेमी० तक। पृथ्वी पर सूर्य प्रकाश को f/1 क्षमता के उत्तललेंस द्वारा केन्द्रित शक्ति का मान लगभग 500 वाट प्रति वर्ग सेमी० ही आता है जो लैसर शक्ति के अरबवें भाग के लगभग है। भगवद्गीता के ये शब्द 'दिवि सूर्यसहस्रस्य......." एकाएक ध्यान आकर्षित करते हैं। प्रथम परमाणु बम के परीक्षण के समय ओपनहाइमर ने भी इस वाक्यांश की ओर ध्यान दिलाया था।

दूसरी श्रेणी में वे लैसर आते हैं जिनमें सम्बन्धित दोनों अवस्थाओं की आबादी उत्सर्जन के पश्चात् पुनः साम्य न होकर उसके समीप पहुँचने के पूर्व ही पम्प क्रिया द्वारा प्रतिलोमित अवस्था में आ जाती है। अतः वे संतत रूप से लैसर क्रिया करते रहते हैं। इनको संतत तरंग लैसर संज्ञा दी गई है। He-Ne लैसर अन्य गैसीय लैसर तथा रंजक (डाई) लैसर इस श्रेणी में आते हैं।

अरैखिक प्रकाशिकी

लैसर युग के पूर्व हमारे प्रकाश के स्रोतों द्वारा उत्पन्न प्रकाश से सम्बन्धित विद्युत क्षेत्रों की तीव्रता एक लाख (10^5) वोल्ट/मीटर से कम ही होती थी। धूप के लिये यह राशि एक हजार (10^3) वोल्ट/

मी० है। परमाणु के भीतर इन क्षेत्रों की तीव्रता दस करोड़ (10^8) एक हज़ार अरब (10^{12}) वोल्ट/मी० तक होती है। इसीलिये सामान्य प्रकाश की तीव्रता परमाणु की संरचना या बनावट को इतना ही प्रभावित करती है कि उसका ध्रुवीकरण P को माध्यम की परावैद्युत प्रवृत्ति χ और विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E से सरल है रैखिक समीकरण

$$P = \chi E$$

द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

आज के लैसर युग में प्राप्त प्रकाश के विद्युत क्षेत्रों की तीव्रता अरबों (10^{10} से 10^{11}) वोल्ट / मीटर तक होती है जिससे परमाणु विस्तृपित हो सकता है और इतने विशाल क्षेत्र के प्रभाव से χ E पर भी निर्भर करती है।

$$\chi(E) = \chi_0 + \chi_1 E + \chi_2 E^2 + \ldots$$

जिससे वह माध्यम जिसमें यह सम्बन्ध लागू है अरैखिक माध्यम कहलाता है। इस स्थिति में उपरोक्त समीकरण के केवल दो पदों का उपयोग करते हुए (क्योंकि $\chi_0 >> \chi_1 >> \chi_2$) ध्रुवीकरण को

$$P = \chi_0 E + \chi_1 E^2$$

से व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि प्रकाश तरंग को साइन या कोसाइन के रूप में लिखा जा सकता है उसके वैद्युत सदिश (वेक्टर) में भी इनका उपयोग होगा।

यह सरलता से देखा जा सकता है कि P के समीकरण में पहला पद तरंग की आवृत्ति पर निर्भर होगा जबकि दूसरा आवृत्ति के वर्ग पर। अब यदि तरंग कोसाइन का उपयोग कर व्यक्त की गई है तो $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ के आधार पर यह सुगमता से देखा जा सकता है कि दूसरा पद पहले पद की मूल आवृत्तिνसे दुगुनी आवृत्ति 2ν को जन्म देता है। इस प्रकार माध्यम एक तरह से उस एरिअल का काम करता है जो 2ν तरंगों आवृत्ति के विकिरण का जनक है। क्योंकि माध्यम का अपवर्तनांक आवृत्ति पर निर्भर करता है अतः 2ν के लिये प्रकाश वेग भिन्न होगा। तब मूल और द्विगुणित आवृत्तियों की तरंगों के संचालन के बीच तालमेल स्थापित करने की समस्या के हल का प्रश्न है। इसका निराकरण द्विअपवर्ती एक अक्षीय क्रिस्टलों की सहायता से हो जाता है। इसी प्रकार द्वितीय संनादी विकिरण से चतुर्थ संचारी विकिरण प्राप्त किया जा सकता है तथा ये व्यवस्थाएँ क्रमशः द्वितीय संनादी और चतुर्थ संनादी जनक कहलाती हैं। स्पष्ट है कि मूल विकिरण की अपेक्षा द्वितीय और चतुर्थ संनादी विकिरण की तीव्रता क्रमशः कम होती जाती है।

यदि अरैखिक माध्यम पर एक के स्थान पर दो आवृतियों ν_1 और ν_2 का लैसर प्रकाश एक्साथ डाला जाय तो हमको ν_2 के अतिरिक्त $\nu_1 + \nu_2$ तथा $\nu_1 - \nu_2$ आवृत्तियों का भी प्रकाश प्राप्त करने का

स्रोत मिल जाता है। उचित विन्यास के द्वारा ऐसी व्यवस्था की जा सकती है, कि पम्प तरंग v_1 से v_2 उपलब्ध हो सके। यह विन्यास एकल संनादी परिमापी (Parameteric) दोलक कहलाता है।

हमने प्रारम्भ में देखा था कि लैसर विकिरण प्राप्त करने के लिये उद्दीपक प्रकाश की तरंगों की सघनता बढ़ाने के उद्देश्य से उन तरंगों के संनादी कोटर में बहुलित परावर्तन आवश्यक हो जाते हैं। क्योंकि सामान्यतः एक स्रोत में एकाधिक आवृत्तियों का लैसर प्रकाश उत्पन्न होता है यह आवश्यक हो जाता है कि वांछित आवृत्ति को प्रकाश ही कोटर के अक्ष के सामान्तर रहे तथा अन्य अवांछित भिन्न दिशाओं में जाकर निष्प्रभावी हो जायँ। इस रीति से हम प्रकाश की चौड़ी स्पेक्ट्रामी रेखाओं (कई आवृत्तियों के पास-पास होने पर) से कोटर में प्रिज्म या विवर्तन ग्रेटिंग के सही उपयोग से इच्छित तरंगदैर्ध्य का प्रकाश प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार के व्यवस्था युक्त लैसर को हम समस्वरित (tuned) लैसर की संज्ञा देते हैं। कहने की आवश्यकता नहीं कि अपने अत्यन्त कला सम्बद्ध अति तीव्र अत्यन्त एकवर्णी और समान्तर किरणों पर तरंगों के रूप में विकिरण के प्रचालन के गुणों के अतिरिक्त लैसर प्रकाश को ट्यून (समस्वरित) करने की क्षमता ने इसके अनेक क्षेत्रों में उपयोग को बढ़ाया है। विज्ञान, प्रौद्योगिकी, आयुर्विज्ञान, संचार साधनों, राष्ट्रीय सुरक्षा, युद्ध और शायद ही कोई क्षेत्र हो जहाँ इसका उपयोग अपरिहार्य न हो। इतने विशाल क्षेत्र में से हम यहाँ कुछेक उदाहरण लेते हैं।

लैसर के अनुप्रयोग

जब हम किसी अणु या परमाणु का अध्ययन करते हैं तो उसकी अपनी आन्तरिक ऊर्जा के अतिरिक्त गतिज ऊर्जा भी होती है; दूसरे शब्दों में वह उष्ण होता है। उस विशुद्ध रूप के अध्ययन के लिये उसका शीतलीकरण किया जाना है। यह कार्य दो लैसरों की सहायता से कुछ उसी प्रकार सम्पादित किया गया है, जैसे रस्साकशी के खेल में कभी-कभी मध्य बिन्दु स्थिर हो जाता है या किया जा सकता है।

रामन प्रभाव, जिसका शोध भारत में ही हुआ, वह न केवल शुद्ध वैज्ञानिक दृष्टि से महत्व का है वरन् अन्य क्षेत्रों में अनुप्रायोगिक उपयोगिता के उद्देश्य से भी। आज लैसर विकिरण ने इसके इस्तेमाल के क्षेत्र को जहाँ वृहद कर दिया है वहीं रामन प्रभाव के नए आयामों को भी जन्म दिया है। रामन प्रभाव की खोज के बाद ही एक भौतिकज्ञ ने तो यहाँ तक कह दिया था कि सृष्टा ने पारद के स्पेक्ट्रम में 4358 Å (एंग्स्ट्रॉम) की रेखा से अधिक तरंग दैर्ध्य के स्थान में काफी स्थान रिक्त या रेखाविहीन इसलिये रखा है कि वहाँ रामन रेखाओं को प्राप्त किया जा सके। आज लैसर द्वारा किसी भी वांछित तरंग दैर्ध्य का तीव्र विकिरण प्राप्त किया जा सकता है। इस गुण के साथ लैसर विकिरण के अनुप्रस्थ परिच्छेद के छोटे होने के कारण अध्ययनगत पदार्थ की मात्रा भी बहुत कम होने पर भी पर्याप्त है। सामान्यतः जैव मूल के पदार्थ, विशेषकर आयुर्विज्ञान महत्व के, कम मात्रा में ही उपलब्ध होते हैं, साथ ही अधिक ऊर्जा के फोटोन (लघु तरंग दैर्ध्य जैसे पराबैंगनी, या कभी-कभी बैंगनी या नीले भी) उनकी संरचना को भी प्रभावित या क्षतिग्रस्त कर सकते हैं। ऐसी हालत में समस्वरित लैसर से लाल या अवरक्त विकिरण (कम ऊर्जा के फ़ोटन) के द्वारा प्रभावी अध्ययन किया जा सकता है।

यद्यपि रामन् स्पेक्ट्रम में प्राप्त आवृतियाँ आपतित विकिरण के तरंगदैर्ध्य पर निर्भर नहीं तथापि जब इस विकिरण की आवृति (या तरंगदैर्ध्य) पदार्थ के अनुनादी अवशोषण के निकट होती है तब रामन् रेखाएँ तीव्र हो जाती हैं। इस प्रकार SO_2 अणु का एक अवशोषण संक्रमण 3400 Å के समीप है, अतः लाल (रूबी) लैसर की 6943 Å रेखा की द्वितीय संनादी आवृति, अर्थात् 3471Å का विकिरण इस अणु के अध्ययन में विशेष रूप से उपयोगी होगा। वस्तुतः पर्यावरण में SO_2 के त्वरित पता लगाने में इस रीति का उपयोग होता है।

क्योंकि लैसर विकिरण को किसी भी ऐच्छिक तरंग दैर्ध्य के लिये समस्वरित किया जा सकता है अतः उसके इस गुण का उपयोग उन कार्यों के लिये अपरिहार्य है जिनके लिये किसी विशिष्ट ऊर्जा (तरंगदैर्ध्य) की आवश्यकता हो। उदाहरणार्थ यदि हम किसी अणु या परमाणु की खास अवस्थाओं को उत्तेजित करना, या उनके किसी विशिष्ट बन्धन का विच्छेद करना चाहते हैं तो उसके लिये उचित तरंगदैर्ध्य के लैसर विकिरण का उपयोग करेंगे। ऐसे प्रयोग वांछित रासायनिक क्रियाएँ प्रारम्भ करने, उन्हें नियंत्रित करने तथा उनके विस्तृत अध्ययन में सहायक होंगे। इसी क्रम में स्पन्दित , विशेषकर 10^{-10} से० से 10^{-12} से० के स्पन्द लैसर के अपने उपयोग है। प्रकाश के इन अति सूक्ष्म स्पन्दों की सहायता से हम उन क्रियाओं का अध्ययन कर सकते हैं जो इतनी त्वरित हैं कि अति अल्प कालावधि में पदार्थों को प्रभावित कर सकती हैं। संदीप्ति, प्रतिदीप्ति, जैव एवं आयुर्विज्ञान के क्षेत्र और प्रकाश संश्लेषण की क्रियाओं का अध्ययन इस दृष्टि से उपयोगी है।

हम जानते हैं कि अधिकांश परमाणुओं के एकाधिक आइसोटोप होते हैं और कुछ प्रयोगों में हम इनमें से किसी एक को ही उपयोग में लाना चाहते हैं या पदार्थ में उस एक का अनुपात अधिक रखना चाहते हैं। न्यूक्लीय विखण्डन द्वारा पारमाणविक ऊर्जा प्राप्त करने में 235 द्रव्यमान का यूरेनियम (235) विखण्डनीय है जबकि सामान्य यूरेनियम में इसका अनुपात 1000 भागों में केवल 7 भाग है। यदि इसका अनुपात कम से कम 30 भाग कर दिया जाय तो यूरेनियम विखण्डन की क्रिया सुगमता से हो जाय। एक आइसोटोप के पृथकीकरण का कार्य भी लैसर द्वारा सम्पन्न किया जा सकता है। यह ज्ञातव्य है कि भिन्न-भिन्न आइसोटोपों के कारण पदार्थ का अवशोषण स्पेक्ट्रम भिन्न-भिन्न होता है, अर्थात् उनके ऊर्जा तलों में अन्तर होता है। समस्वरित लैसर की सहायता से हम वांछित आइसोटोप के अणुओं को उत्तेजित अवस्था में पहुँचा कर साथ ही ऐसे विकिरण में आलोकित करते हैं जिससे या तो वे आयनित हो जायँ या वियोजित। आयनित आइसोटोपों को वैद्युत क्षेत्र की सहायता से अलग किया जा सकता है। सामान्यतः यह विधि अधिक सफल है। उदाहरण के लिये ^{235}U और ^{238}U के अवशोषण स्पेक्ट्रमों में एक दूसरे से जो अन्तर है वह रंजक (डाई) लैसर के बैण्ड की चौड़ाई से पचास गुना अधिक है अतः ^{235}U को पृथक करने में कोई कठिनाई नहीं ।

यद्यपि सितारों के क्रोड में हाइड्रोजन के हीलियम के परमाणुओं में संलयन की क्रिया निरंतर चल रही है, पृथ्वी पर ऊर्जा के इस अपार स्रोत को कार्यान्वित करना सफल नहीं हुआ है। लैसर के निर्माण के बाद संलयन को कार्यान्वित करने के प्रयास में इसका उपयोग अवश्य किया जा रहा है। हल्के तत्वों का संलयन तभी सम्भव है जब इस क्रिया के लिये दस करोड़ अंश का परमताप उपलब्ध कराया

जाय। इस दिशा में तत्वों (द्रवित ड्यूटेरियम ^{2}H और ट्रिटियम ^{3}H) को एक अति सूक्ष्म काँच की गोली (पेलेट) में रख कर सब दिशाओं से एक साथ अति शक्तिशाली 10^{-9} से० के स्पन्द लैसर विकरण से प्रहार किया जाता है। फलस्वरूप ताप बढ़ने से उसका संपीडन होता है। तभी सही समय (अधिकतम संपीडन की अवस्था में) लैसर के सबसे तीव्र स्पन्द का आगमन होना चाहिए जिससे संलयन क्रिया सम्पन्न हो सके। मेरी जानकारी के अनुसार अभी अभीष्ट की प्राप्ति नहीं हुई है।

लैसर का एक अत्यन्त पतले किरण पुञ्ज के रूप में होना, उसकी शक्ति तथा उसके प्रकाश को 10^{-2} से 10^{-3}सेमी व्यास के बिन्दु तक केन्द्रित करने की क्षमता के कारण उसको उन बारीक स्थानों पर उपयोग में लाया जा सकता है जहाँ अन्य साधन असफल हों। इस प्रकार दस लाख से एक करोड़ वाट/ वर्ग सेमी० की शक्ति से धातुओं को काटा, उनमें छेद करना तथा सफ़ाई के साथ वेल्ड करना सम्भव है। इलेक्ट्रानिकी में प्रयोग में आने वाले सूक्ष्म परिपथों के निर्माण तथा इन्टीग्रेटेड परिपथों के दोष निवारण में भी लैसर विकिरण काम में आता है।

शल्य क्रिया के क्षेत्र में भी लैसर ने अपनी क्षमा सिद्ध कर दी है। अपनी शक्ति के कारण एक सेकण्ड के सौवें भाग के स्पन्द विकिरण की सहायता से वह बिना रक्त निकाले पीड़ारहित ऑपरेशन करने में सफल है। Nd:YAG लैसर का हरित प्रकाश लाल रक्त कोशिकाओं द्वारा अवशोषित नहीं होता और आँख के लेंस से होकर दृष्टि पटल (रेटिना) तक पहुँच जाता है जिससे वहाँ शल्य क्रिया करना सम्भव होता है। इसी प्रकार यकृतफेफड़ों, अर्बुद (ट्यूमर) आदि के उपचार में भी लैसर उपयोगी है।

लैसर का उपयोग रैडर के स्थान पर या उसके साथ भी किया जाता है। इस प्रकार पृथ्वी-चन्द्रमा के बीच की दूरी को इसकी सहायता से सुधारा गया है। इसकी तथा मैसर की रवविहीन प्रवर्धन क्षमता के कारण रेडियो खगोल-विज्ञान में विशेष महत्व है। माइक्रोवेव के स्थान पर लैसर प्रकाश का रैडर के क्षेत्र में उपयोग इस दृष्टि से भी उत्तम है कि उसके द्वारा पतला किरण पुंज भेजा जाता है जो पिण्डकी यथार्थ जानकारी प्राप्त कर सकता है, परन्तु विस्तृत प्रदेश के सर्वेक्षण में माइक्रोवेव, अतः रैडर अधिक उपयोगी है। व्यावहारिक दृष्टि से सामान्य रैडर और लैसर दोनों का एक साथ उपयोग श्रेयस्कर है।

इसी क्रम में हम सूचना सम्बन्धी अनुप्रयोग तथा प्रकाशिक संचार के विषय पर आते हैं। दृश्य प्रकाश 10^{14} हर्ट्ज़ (Hz) आवृत्ति की कोटि का होता है और हमारी वाक् ध्वनि 20 से 20 हज़ार हर्ट्ज़ की आवृत्ति तक होती है। (दूरदर्शन प्रसारण में यह 10^{7} Hz तक हो जाती है) क्योंकि दूर संचार में खाँचे या खण्ड के लिये 10^{3} या $10^{4}Hz$ का बैण्ड चाहिए अतः यह स्पष्ट है कि लैसर के उपयोग से हम एकसाथ दस करोड़ बैण्डों को संभाल सकते हैं- व्यवहार में यह संख्या कम हो सकती है। यह संचार लैसर किरणों की सहायता से खुले स्थान में सीधा भी किया जा सकता है और प्रकाशिक तन्तुओं (सूत्रों) के द्वारा भी ये केवल काँच के पतले तन्तु के बने होते हैं तथा इनकी बाहरी सतह पर भीतर के काँच की अपेक्षा कम अपवर्तनांक के कांच का आवरण (Cladding) होता है जिससे आन्तरिक पूर्ण परावर्तनों के द्वारा लैसर विकिरण गन्तव्य तक पहुँचता है और इस संचरण में विकिरण की तीव्रता का

ह्रास नगण्य होता है। इसके अतिरिक्त लैसर संचरण का लाभ है व्यतिकरण से मुक्ति तथा रव की अनुपस्थिति। कम्प्यूटर प्रणाली में वे संचार लाइनें जो सिगनल लाती और ले जाती हैं त्रुटियों का स्रोत हैं। उन्नत दक्षता की दृष्टि से कम्प्यूटरों को अब जाल तंत्र से जोड़ा जाता है। इस प्रणाली में जानकारी को भिन्न-भिन्न प्रणालों (वाहिकाओं) द्वारा त्वरित पहुँचाने के लिये प्रकाशिक-तन्तुओं द्वारा लैसर संचरण उपयुक्त है। होलोग्राफी (सम्पूर्ण लेखन) का शोध 1948 में हुआ था, परन्तु लैसर के विकास के पूर्व उसका महत्व सही-सही आँका न जा सका। आज होलोग्राम के द्वारा सूचना का संग्रहण, संचरण और संरक्षण पूर्णतया सुरक्षित है।

ये उदाहरण लैसर की उपयोगिता और उसके बहुआयामी व्यक्तित्व के परिचायक मात्र हैं। वस्तुतः लैसर ने अनेक क्षेत्रों में ज्ञान प्राप्त करने के द्वार खोल दिये हैं। पृथ्वी पर ही नहीं अन्तरिक्ष में भी 18 सेमी० तथा 1.35 सेमी० के क्रमशः OH तथा H_2O (जल) के मैसर विकिरणों, लैसर के जुड़वाँ भाई की जानकारी प्राप्त हुई है। विज्ञान और मानव सत्य की खोज में निरन्तर आगे बढ़ते रहे हैं और बढ़ते रहेंगे।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 2, April, 1998.

(ए)-प्रकार के सुसंगत प्रतिचित्रणों हेतु एकसमान समष्टि में एक उभयनिष्ट स्थिर बिन्दु प्रमेय

रवीन्द्र गर्ग

गणित विभाग, उच्च शिक्षा उत्कृष्टता संस्थान,
कोलार रोड, पो० बॉ० नं० 588 रवि शंकर नगर पोस्ट ऑफिस, भोपाल (म० प्र०)

[प्राप्त-अक्टूबर 22, 1997]

सारांश

इस प्रपत्र में (ए)-प्रकार के सुसंगत प्रतिचित्रणों के दो युग्मों हेतु एकसमान समष्टि में एक उभयनिष्ट स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध की गई है।

Abstract

A common fixed point theorem for compatible mappings of type-(A) on Uniform space : *By* Ravindra Garg, Mathematics Department, Institute for Excellence in Higher Education, Kolar Road, P. B. No. 588, Ravishanker Nagar Post Office, Bhopal (M.P.).

In this paper, we prove a common fixed point theorem for two pairs of compatible mappings of type-(A) on Uniform space.

प्रस्तावना

सन् 1986 में जुक[2] ने सुसंगत प्रतिचित्रणों की अभिधारणा (Concept) को प्रस्तुत किया था, जो कि क्रम विनिमयी एवं दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों का सार्वीकरण था। हाल ही में जुक, मूर्थी एवं चो[3] ने (ए)-प्रकार के सुसंगत प्रतिचित्रणों की नवीन अभिधारणा प्रस्तुत की है, जो कि कुछ शर्तों में सुसंगत प्रतिचित्रणों के तुल्य (Equivalent) होते हैं।

इस प्रपत्र का उद्देश्य उक्त नवीन अभिधारणा का उपयोग करते हुए एकसमान समष्टि में एक उभयनिष्ट स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध करना है, जो कि कान तथा फिशर[4] का सार्वीकरण है।

परिभाषायें एवं उपप्रमेय

इस प्रपत्र में हम (X,U) द्वारा एक हॉसडोर्फ क्रम से पूर्ण एक समान समिष्ट (Hausdorff sequentially complete uniform space) को दर्शायेंगे जो कि X पर छद्म दूरिकों (pseudometrics) के एक कुल P द्वारा परिभाषित है।

X पर किसी छद्म दूरिक p तथा $r>0$ के लिये, माना कि

$$V_{(p,r)} = \{ (x,y) : x,y \in X, p(x,y) < r \},$$

$$G = \left\{ V_n : V_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_{(p_i, r_i)}, r_i > 0, p_i \in P, i = 1,2,3,\ldots,n \right\}$$

और

$$\alpha V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{(p_i, \alpha r_i)}, \ \forall \ \alpha > 0$$

जहाँ

$$P_i \in P, r_i > 0, i = 1,2,\ldots,n$$

हम आचार्य[1] द्वारा प्रदत्त निम्नलिखित उपप्रमेयों का उपयोग करेंगे।

उपप्रमेय 1 : यदि G में V हो तथा $\alpha, \beta > 0$ तब

(i) $\alpha(\beta V) = (\alpha\beta) V$

(ii) $\alpha V o \beta V \subset (\alpha + \beta) V$

(iii) $\alpha V \subset \beta V$ यदि $\alpha < \beta$

उपप्रमेय 2 : माना कि X पर एक छद्म दूरिक p हो तथा $\alpha, \beta > 0$, तब

$$(x,y) \in \alpha V_{(p,r_1)} \text{ into } \alpha\beta V_{(p,r_2)} \Rightarrow p(x,y) < \alpha r_1 + \beta r_2$$

उपप्रमेय 3 : यदि $x, y \in X$ हो तो G में प्रत्येक V के लिये एक धनात्मक संख्या λ इस प्रकार होती है कि $(x,y) \in \lambda V$.

उपप्रमेय 4 : G में स्वेच्छ V के लिये, X पर एक छद्म दूरिक इस प्रकार का होता है कि $V = V_{(p,1)}$ इस स्थिति में p, V का मिनकाउस्की (Minkowski) छद्म दूरिक कहलाता है।

अब हम जुक[2] और जुक, मूर्थी एवं चो[3] का अनुसरण करते हुए एकसमान समष्टियों में कुछ परिभाषायें व उपप्रमेयों को प्रस्तुत करेंगे।

परिभाषा 1 : प्रतिचित्रणों $A, B : X \to X$ का एक युग्म सुसंगत कहलायेगा यदि

$$\lim_{n \to \infty} p(ABX_n, BAx_n) = 0,$$

जबकि X में $\{x_n\}$ इस प्रकार का अनुक्रम हो कि X के किसी बिन्दु z के लिये

$$\lim_{n \to \infty} Bx_n = \lim_{n \to \infty} Ax_n = z,$$

जहाँ p, X पर कोई छद्म दूरिक हैं।

उपप्रमेय 5 : माना कि A और B समष्टि X पर सुसंगत स्व-प्रतिचित्रण हो तथा X के किसी बिंदु z के लिये

$$\lim_{n \to \infty} Ax_n = \lim_{n \to \infty} Bx_n = z,$$

तब $\lim_{n \to \infty} ABx_n = Bz$ होगा यदि B संतत हो।

परिभाषा 2 : प्रतिचित्रणों $A, B : X \to X$ का एक युग्म (ए)-प्रकार का सुसंगत कहलाता है, यदि

$$\lim_{n \to \infty} p(BAx_n, AAx_n) = 0,$$

और

$$\lim_{n \to \infty} p(ABx_n, BBx_n) = 0,$$

जबकि X में $\{x_n\}$ इस प्रकार का अनुक्रम हो कि X के किसी बिंदु z के लिये

$$\lim_{n \to \infty} Ax_n = \lim_{n \to \infty} Bx_n = z$$

निम्नलिखित उपप्रमेय दर्शाता है कि उपरोक्त परिभाषायें 1 एवं 2 कुछ शर्तों के साथ तुल्य (equivalent) होती हैं।

उपप्रमेय 6 : यदि $A, B : X \to X$ संतत एवं सुसंगत हो, तब वे (ए)-प्रकार के सुसंगत भी होते हैं।

उपप्रमेय 7 : यदि $A, B : X \to X$ (ए)- प्रकार के सुसंगत प्रतिचित्रण हो तथा A एवं B में से कोई एक संतत हो, तब A और B सुसंगत होते हैं।

उपप्रमेय 8 : यदि $A, B : X \to X$ संतत प्रतिचित्रण हो तब A एवं B सुसंगत होंगे यदि और केवल यदि (Iff) वे (ए)-प्रकार के सुसंगत हो।

मुख्य परिणाम

प्रमेय 1 : मान लो f, g, s एवं $T : X \to X$ निम्नलिखित प्रतिबंधों की तुष्टि करते हों।

(1.1) $f(X) \subset S(X)$, $g(X) \subset T(X)$;

(1.2) युग्म $\{f, T\}$ एवं $\{g, S\}$, (ए)-प्रकार के सुसंगत हो;

(1.3) f, g, S एवं T में से कोई एक संतत हों;

(1.4) माना कि G में किसी V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 तथा X में x, y के लिये

$$(Tx, Sy) \in V_1, (Tx, fx) \in V_2, (Sy, gy) \in V_3, (Tx, gy) \in V_4, (Sy, fx) \in V_5,$$

जिसका अभिप्राय है

$$(fx, gy) \in \alpha_1 V_1 \cdot \alpha_2 V_2 \cdot \alpha_3 V_3 \ \alpha_4 V_4 \cdot \alpha_5 V_5$$

कुछ वास्तविक संख्याओं $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq \alpha$ के लिये जोकि निम्न का पालन करती हो :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\,\alpha_4 = \alpha < 1;$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\,\alpha_4 = \alpha < 1\,;$$

तब f, g, s एवं T का एक अद्वितीय उभयनिष्ट स्थिर बिन्दु होता है।

उपपत्ति : माना कि X में x एवं y स्वेच्छ (arbitrary) हो तथा G में V एक स्वेच्छ हो। यदि p, V का मिनकाउस्की छद्म दूरिक हो, तब निम्न रखने पर

$$p(Tx, Sy) = r_1,\ \ p(Tx, fx) = r_2,\ \ p(Sy, gy) = r_3,$$

$$p(Tx, gy) = r_4,\ \ p(Sy, fx) = r_5$$

तब स्वेच्छ $\in > 0$ के साथ, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(Tx, Sy) \in (r_1 + \in) V, \quad (Tx, fx) \in (r_2 + \in) V, \quad (Sy, gy) \in (r_3 + \in) V,$$

$$(Tx, gy) \in (r_4 + \in) V, \quad (Sy, fx) \in (r_5 + \in) V$$

तब (1.4) से,

$$(fx, gy) < \alpha_1 (r_1 + \varepsilon) V_0 \alpha_2 (r_2 + \varepsilon) V_0 \alpha_3 (r_3 + \varepsilon) V_0 \alpha_4$$

$$(r_4 + \varepsilon) V_0 \alpha_4 (r_5 + \varepsilon) V,$$

उपप्रमेयों 1, 2 एवं 4 का उपयोग करने से हमें निम्न प्राप्त होता है,

$$p(fx, gy) < \alpha_1 (r_1 + \varepsilon) + \alpha_2 (r_2 + \varepsilon) + \alpha_3 (r_3 + \varepsilon) + \alpha_4 (r_4 + \varepsilon) + \alpha_4 (r_5 + \varepsilon),$$

चूँकि $\in$ स्वेच्छ (arbitrary) है, अत:

$$p(fx, gy) \leq \alpha_1 p(Tx, Sy) + \alpha_2 p(Tx, fx) + \alpha_3 p(Sy, gy)$$

$$+ \alpha_4 p(Tx, gy) + \alpha_4 p(Sy, fx)$$

और इसलिये,

$$p(fx, gy) \leq \alpha \max \{ p(Tx, Sy), p(Tx, fx), p(S\ , gy),$$

$$1/2 [p(Tx, gy) + p(Sy, fx)] \}, \qquad (1.5)$$

प्रत्येक $x, y \in X$ के लिये।

अब यदि $x_1 \in X$ स्वेच्छ हो, तब हम, (1.1) से, एक बिन्दु $x_2 \in X$ इस प्रकार चुन सकते हैं कि $g x_1 = T x_2 = y_1$ और इस बिन्दु x_2 के लिये, X में एक बिन्दु x_3 का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि $f x_2 = S x_3 = y_2$ और इसी प्रकार आगमनता (Inductively) से

$$\begin{cases} y_{2n-1} = g x_{2n-1} = T x_{2n} \\ y_{2n} = f x_{2n} = S x_{2n+1} \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1.6)$$

तब (1.5) द्वारा,

$$p(y_{2n}, y_{2n-1}) = p(fx_{2n}, gx_{2n-1})$$

$$\leq \alpha \max \{ p(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}), p(Tx_{2n}, fx_{2n}), p(Sx_{2n-1}, gx_{2n-1})$$

$$1/2 [p(Tx_{2n}, gx_{2n-1}) + p(Sx_{2n-1}, fx_{2n})] \}$$

$$= \alpha \max \{ p(y_{2n-1}, y_{2n-2}), p(y_{2n-1}\ y_{2n}), p(y_{2n-2}, y_{2n-1})$$

$$1/2 [p(y_{2n-1}, y_{2n-1}) + y_{2n-1}) + p(y_{2n-2}, y_{2n})] \}$$

अर्थात् $\quad p(y_{2n}, y_{2n-1}) \leq \alpha p(y_{2n-1}, y_{2n-2})$

इसी प्रकार,

$$p(y_{2n-1}, y_{2n-2}) \leq \alpha p(y_{2n-2}, y_{2n-3}).$$

चूँकि $\alpha < 1$, इसलिये $\{ y_n \}$ एक कोशी अनुक्रम है और X को पूर्णता के कारण, $z \in X$ का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि $y_n \to z$ जबकि जब $n \to \infty$ और जैसा कि, $\{ gx_{2n-1} \} = \{ Tx_{2n} \}$ एवं $\{ fx_{2n} \} = \{ Sx_{2n+1} \}$, $\{ y_n \}$ का उपानुक्रम है इसलिये वे भी z पर अभिसरित होंगे।

अब सर्वप्रथम, माना कि T संतत हो, चूँकि f और T (ए)-प्रकार के सुसंगत हैं, इसलिये परिभाषायें 1,2 एवं उपप्रमेय 5,7 से,

$$fTx_{2n} \text{ तथा } T^2 x_{2n} \to Tz \text{ यदि } n \to \infty,$$

(1.5) उपयोग करने से,

$$p(fTx_{2n}, gx_{2n-1}) \leq \alpha \max \{ p(T^2 x_{2n}, Sx_{2n-1}), p(T^2 x_{2n}, fTx_{2n}),$$

$$p(Sx_{2n-1}, gx_{2n-1}), 1/2 [p(T^2 x_{2n}, gx_{2n-1}) + p(Sx_{2n-1}, fTx_{2n})] \}$$

सीमा लेने पर, जबकि $n \to \infty$

$$p(Tz, z) \leq \alpha \max \{ p(Tz, z), p(Tz, Tz), p(z, z),$$

$$1/2 [p(Tz, z) + p(z, Tz)] \}$$

एक विरोध है, अतः $Tz = z$.

पुनः (1.5) का उपयोग करने से,

$$p(fz, gx_{2n-1}) \leq \alpha \max\{p(Tz, Sx_{2n-1}), p(Tz, fz), p(Sx_{2n-1}, gx_{2n-1})$$
$$1/2[p(Tz, gx_{2n-1}) + p(Sx_{2n-1}, fz)]\}$$

सीमा लेने पर जबकि $n \to \infty$, हमें प्राप्त होता है,

$$p(fz, z) \leq \alpha \max\{p(Tz, z), p(Tz, fz), p(z, z),$$
$$1/2[p(T_z, z) + p(z, fz)]\}$$
$$= \alpha_p(fz, z)$$

एक विरोध है, अतः $fz = z = Tz$.

चूँकि $f(X) \subset S(X)$, इसलिये X में w का अस्तित्व इस प्रकार है कि $z = fz = Sw$.

(1.5) से हमें निम्न प्राप्त होता है

$$p(z, gw) = p(fz, gw)$$
$$\leq \alpha \max\{p(Tz, Sw), p(Tz, fz), p(Sw, gw)$$
$$1/2[p(Tz, gw) + p(Sw, fz)]\}$$
$$= \alpha p(z, gw)$$

एक विरोध है, अतः $z = Tz = fz = Sw = gw$.

चूँकि g एवं S, (ए)- प्रकार के सुसंगत हैं तथा $gw = Sw = z$, इसलिये $p(gSw, Sgw) = 0$ अतः $zg = gSw = Sgw = Sz$ साथ ही, (1.5) से,

$$p(z, Sz) = p(fz, Sz) \leq \alpha \max\{p(Tz, Sz), p(Tz, fz)$$
$$p(Sz, gz), 1/2[p(Tz, gz) + p(Sz, fz)]\}$$
$$= \alpha p(z, Sz),$$

जोकि एक विरोधाभास है, अतः $Sz = z$ और इसलिये f, g, s एवं T का उभयनिष्ट स्थिर बिन्दु z है।

इसी प्रकार, f या g या S के संतत की स्थिति में भी सिद्ध कर सकते हैं।

अंत में z की अद्वितीयता असमिका (1.5) से सरलता से सिद्ध की जा सकती है। इस प्रकार उपपत्ति पूर्ण हुई।

अब हम प्रतिचित्रणों के एक कुल (family) के लिये प्रमेय 1 की एक उपप्रमेय प्रस्तुत करते हैं :

उपप्रमेय 9 : माना कि स्व-प्रतिचित्रणों का एक कुल हो जो कि निम्नलिखित शर्तों का पालन करता है, I एक सूचकांक (Indexing) समुच्चय हैं :

(i) $\bigcup_{i \in I} g_i(X) \subset S(X) \cap T(X)$

(ii) प्रत्येक g_i, S एवं T के साथ, (ए)-प्रकार की सुसंगतता रखते हों ;

(iii) प्रतिचित्रणों S, T या g_i में से कोई एक संतत हो;

(iv) यदि G में किसी V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 तथा X में x, y के लिये

$$(Tx, Sy) \in V_1,\ (Tx, g_i x) \in V_2,\ (Sy, g_j y) \in V_3,$$

$$(Tx, g_j y) \in V_4,\ (Sy, g_i x) \in V_5,$$

तब

$$(g_i x,\ g_j y) \in \alpha_1 V_1 \circ \alpha_2 V_2 \circ \alpha_3 V_3 \circ \alpha_4 \circ V_4 \alpha_4\ V_5$$

कुछ वास्तविक संख्याओं $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0$ के लिये जो कि निम्नलिखित को संतुष्ट करते हों,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\,\alpha_4 = \alpha < 1$$

तब g_i, S एवं T एक उभयनिष्ट स्थिर बिन्दु होता है।

उपरोक्त की उपपत्ति प्रमेय 1 तथा [5] से आसानी से प्राप्त की जा सकती है।

निर्देश

1. आचार्य, एस० पी० : Yokohoma Math. J. 1974, **22** (1-2), 105-16.

2. जुक, जे० : Internat. J. Math. & Math. Sci., 1986, **9**, 771-779.

3. जुक, जे०, मूर्थी, पी० पी० तथा चो, वाई० जे० : Math. Japan., 1993, **38**, 381-90.

4. खान, एम० एस० तथा फिशर , बी० : Mathematics Seminar Notes, 1982,

5. रोडस्, बी० ई० : Indian J. Pure & Appl. Math. 1990, **21** (1), 10-20.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 2, April, 1998.

शिफ क्षार-धातु संकुल यौगिकों का संश्लेषण एवं भौतिक-रासायनिक अभिलक्षणन अध्ययन

ए. पी. मिश्र, विवेक तिवारी तथा महिमा खरे

अकार्बनिक रसायन शोध प्रयोगशाला, रसायन विभाग,
डॉ० हरीसिंह गौर विश्वविद्यालय, सागर (म. प्र.)

[प्राप्त-अक्टूबर 25, 1997]

सारांश

4-डाइमेथिल ऐमीनो बेंजल्डिहाइड के साथ 4-क्लोरो-ऐनिलीन/4-ब्रोमोऐनिलीन तथा 3-नाइट्रोऐनिलीन के संघनन द्वारा शिफ क्षार बनाकर निकिल (Ni_2^+) तथा कापर (Cu_2^+) धातुओं के संकर यौगिकों का निर्माण किया गया। विभिन्न भौतिक तथा रासायनिक विधियों जैसे सूक्ष्मविश्लेषण, पराबैंगनी दृश्य तथा अवरक्त स्पेक्ट्रम, चालकता तथा चुम्बकीय मापनों द्वारा इन संकर यौगिकों के गुणों का अध्ययन किया गया। इन संकर यौगिकों के सामान्य सूत्र $[ML(H_2O)_2Cl_2]2H_2O$ तथा $[MLCl_2(H_2O)_2]2H_2O$ हैं।

Abstract

Sythensis and physico-chemical studies of Schiff-base metal-complexes. *By* A. P. Misra, Vivek Tiwari and Mahima Khare, Inorganic Laboratories, Chemistry Department, H. S. Gaur University, Sagar (M. P.).

Complexes of Ni (II) and Cu (II) with Schiff-bases formed by condensation of 4-dimethyl amino benzaldehyde and 4-chloroaniline/4-bromoaniline/3-nitroaniline, have been synthesized. Physico-chemical properties of these complexes have been investigated with the help of microanalytical, conductance, magnetic, uv-vis and ir-spectral data. The complexes are of general formula $ML(H_2O)_2Cl_2 \cdot 2H_2O$ and $ML\,Cl_2(H_2O)_2 \cdot 2\,H_2O$.

सारणी क 1

यौगिकों के वैश्लेषिक तथा चुम्बकीय आँकड़े

आणविक सूत्र [रंग]	अणुभार (गलनांक बिंदु) °C	तत्व विश्लेषण % प्राप्त (गणनात्मक) C	H	N	M	μ_{eff} B.M.	ηM ओह्म$^{-1}$ मोल$^{-1}$ सेमी$^{-1}$
(1) $C_{15}H_{15}N_2Cl$ (डीएबीसी)(लीगैण्ड) [हल्का पीला]	285.5 (110°)	68.47 (69.63)	5.68 (5.80)	10.29 (10.83)	- -	- -	- -
(2) $[Ni(C_{15}H_{15}N_2Cl)(H_2O)_2]\ Cl_2.2H_2O$ [नारंगी भूरा]	460.0 (128)	37.96 (39.10)	4.93 (5.01)	6.31 (6.08)	11.84 (12.76)	- -	212.0 -
(3) $[Cu(C_{15}H_{15}N_2Cl)(H_2O)_2]\ Cl_2.2H_2O$ [काला]	465.0 (136)	37.31 (38.68)	4.52 (4.94)	6.18 (6.01)	13.40 (13.64)	1.91	29.6
(4) $C_{15}H_{15}N_2Br$ (डीएबीबी) [धूसर पीला]	316.09	55.31 (56.80)	4.57 (4.73)	8.43 (8.83)	-	-	-
(5) $[Ni(C_{15}H_{15}N_2Br)Cl_2(H_2O)_2.2H_2O$ [धूसर पीला]	518.4 (95)	37.36 (34.72)	4.47 (4.43)	5.88 (5.40)	11.14 (11.28)	3.12	27.1
(6) $[Cu(C_{15}H_{15}N_2Br)Cl_2(H_2O)_2.2H_2O$ [धूसर पीला]	469.4 (115)	37.31 (38.34)	3.64 (3.62)	5.68 (5.96)	13.11 (13.52)	1.84	34.8
(7) $C_{15}H_{15}N_3O_2$ (डीएबीएन) [नारंगी रवे]	269 (110)	65.42 (66.91)	5.41 (5.57)	15.13 (15.61)	-	-	-
(8) $[Ni(C_{15}H_{15}N_3O_2)(H_2O)_2]Cl_2.2H_2O$ [सुनहरा भूरा]	470.5 (165)	37.12 (38.23)	4.63 (4.88)	8.64 (8.92)	11.91 (12.40)	- -	218.3 -
(9) $[Cu(C_{15}H_{15}N_3O_2)(H_2O)_2]\ Cl_2.2H_2O$	475.5 (135)	36.77 (37.85)	4.62 (4.83)	8.59 (8.82)	12.80 (13.34)	1.94 -	32.4 -

सारणी क 2

लीगैण्डों तथा धातु यौगिकों के अवरक्त अवशोषण बैण्ड (Cm^{-1})

यौगिक	>C=N (एजोमिथाइन)	$-N(CH_3)_2$	H-O-H	M-O	M-N	M-Cl
(1) डीएबीसी (लीगैण्ड)	1610	2830	-	-	-	-
(2) Ni-संकर यौगिक	1560	2860	3400 760	510	430	-
(3) Cu-संकर यौगिक	1570	2855	3450 780	500	440	290
(4) डीएबीबी (लीगैण्ड)	1610	2800	-	-	-	-
(5) Ni-संकर यौगिक	1570	2850	3400 750	560	480	310
(6) Cu-संकर यौगिक	1580	2860	3450	-	440	330
(7) डीएबीएन (लीगैण्ड)	1600	2820	-	-	-	-
(8) Ni-संकर यौगिक	1560	2840	3380 770	500	390	-
(9) Cu-संकर यौगिक	1570	2850	3420 780	520	410	310

शिफ क्षार के धातु संकर यौगिकों का विस्तृत अध्ययन किया जा चुका है क्योंकि इन संकर यौगिकों का औद्योगिक रूप में तथा जीववैज्ञानिक रूप में महत्वपूर्ण योगदान है । 4-डाइमेथिल ऐमीनो बेंजल्डिहाइड के कुछ अन्य ऐमीन के साथ बनाये गये शिफ क्षारों का संरचनात्मक तथा जीवाणुरोधी क्रियाओं का अध्ययन किया गया है ।[1] वर्तमान शोध का लक्ष्य 4-डाइमेथिल ऐमीनो बेंजाइ-लिडीन 4-क्लोरोऐनिलीन, 4-डाइमेथिल ऐमीनो बेंजाइलि-डीन-4-ब्रोमोऐनिलीन तथा 4-डाइमेथिल ऐमीनो बेंजाइलिडीन-3-नाइट्रोऐनिलीन शिफ क्षारों का तथा इनके धातु संकर यौगिकों (Ni^{2+} तथा Cu^{2+}) का संश्लेषण तथा जीवाणुरोधी क्रियाओं का अध्ययन है ।

प्रयोगात्मक

लीगैण्ड का संश्लेषण : 4-डाइमेथिल बेंजल्डिहाइड के (0.01 मोल) मीथेनॉलिक विलयन में 4 -क्लोरोऐनिलीन 4-ब्रोमोऐनिलीन/3-नाइट्रोऐनिलीन (0.01 मोल) का मीथेनॉलिक विलयन 1:1 मोलर अनुपात में मिलाने से 4-डाइमेथिल ऐमीनो बेंजाइलिडीन-4-क्लोरोऐनिलीन (डी ए बी सी) 4-डाइमेथिल ऐमीनो बेंजाइलिडीन-4-ब्रामोऐनिलीन (डी ए बी बी) तथा 4-डाइमेथिल ऐमीनो बेंजाइलिडीन 3-नाइट्रोएनिलीन (डी ए बी एन) लीगैण्ड बनते हैं ।[2-3] इस क्रियाकारी मिश्रण को जलऊष्मक पर पश्चवाहक यंत्र पर 3-5 घण्टे तक गर्म करते हैं ।

धातु यौगिकों का निर्माण : उचित धातु लवण $MCl_2 . x H_2O$ (0.01 मोल) के मीथेनॉलिक विलयन के साथ शिफ क्षार के मीथेनॉलिक विलयन को 1:1 के अनुपात में मिलाते हैं। इस मिश्रण को जलऊष्मक पर 4-5 घण्टे पश्चवाहक यंत्र में गर्म करते हैं। प्राप्त रंगीन संकर यौगिकों को एथेनॉल से क्रमशः दो-तीन बार साफ करते हैं। संकर यौगिकों को जलशोषक में निर्जल कैल्सियम क्लोराइड पर तथा विद्युत ओवन में 50 – 60°C पर सुखाते हैं। ये संकर यौगिक वायु में स्थिर तथा सामान्य कार्बनिक विलायकों में विलेय हैं।

परिणाम तथा विवेचना

डी ए बी सी, डी ए बी बी तथा डी ए बी एन के संकर यौगिकों के वैश्लेषिक आँकड़े सूचित करते हैं कि धातु एवं शिफ क्षारों का अनुपात 1:1 है। डी ए बी सी क्षार के Ni(II) एवं कापर Cu(II) धातुओं के आण्विक चालकता मान से स्पष्ट होता है कि ये क्रमशः एकल द्विसंयोजी तथा विद्युत अनपघट्य हैं जबकि डी ए बी बी के Ni(II) व Cu(II) धातुओं के संकर यौगिक विद्युत अनपघट्य हैं। डी ए बी एन क्षार के Ni(II) धातु संकर यौगिक एकल-द्विसंयोजी विद्युत अपघट्य तथा Ni(II) धातु संकर यौगिक विद्युत अनपघट्य हैं।[4]

लीगैण्डों के अवरक्त अवशोषण स्पेक्ट्रम : $-N(CH_3)_2$ समूह के बैण्ड 2820 ± 20 Cm^{-1} पर प्राप्त होते हैं । कीलेटीकरण के पश्चात् सभी छः संकर यौगिकों में यह बैण्ड उच्च आवृत्ति क्षेत्र में पहुँचता है जो इस ससूह के कीलेटन में भागीदारी दर्शाता है । लीगैण्डों में >C=N (ऐजोमिथाइल समूह) बैण्ड 1610 Cm^{-1} पर प्राप्त होता है । सभी छः धातु संकर यौगिकों में यह ऐजोमिथाइन समूह रेड शिफ्स के साथ 1570 ± 10 Cm^{-1} पर प्राप्त होता है जो कीलेटन में ऐजोमिथाइन नाइट्रोजन से बंधन दर्शाता

सारणी क 3

शिफ क्षार धातु यौगिकों के इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रम ऑकड़े तथा लीगैण्ड क्षेत्र परिमाप

धातु संकर यौगिक	संक्रमण	बैण्ड Cm^{-1}	लीगैण्ड क्षेत्र परिमाप 10Dq Cm^{-1}	LFSE $KJmol^{-1}$	λ Cm^{-1}
(1) Ni(II)-संकर	: ^1A_1g-^1Eg	12345	-	-	-
यौगिक	: ^1A_1g-^1E_2g	18181	-	-	-
(डीएबीसी)	: ^1A_1g-^1E_1g	<20000	-	-	-
(2) Cu(II)-संकर	: ^2Eg-^2T_2g	12658	15148	108.97	(-)788
यौगिक		16393			
(डीएबीसी)					
(3) Ni(II)-संकर	: $^3A_2g(F)$-$^3T_2g(F)$	9426	9426	135.62	(-)224
यौगिक	: $^3A_2g(F)$-$^3T_1g(F)$	16393			
(डीएबीबी)		17543			
	: $^3A_2g(F)$-$^3T_1g(P)$	21276			
(4) Cu(II)-संकर	: ^2B_1g-^2B_2g	12195	-	-	-
यौगिक	: ^2B_1g-^2Eg	21739	-	-	-
(डीएबीबी)					
(5) Ni(II)-संकर	: ^1A_1g-^1Eg	12987	-	-	-
यौगिक	: ^1A_1g-^1B_2g	17857	-	-	-
(डीएबीएन)	: ^1A_1g-^1B_1g	22727	-	-	-
(6) Cu(II)-संकर	: ^2Eg-^2T_2g	12048	14598	105.02	(-)1717
यौगिक		14598			
(डीएबीएन)					

है । धातु संकर यौगिकों में सहसंयोजित जल की उपस्थिति 3400 – 3500 Cm^{-1} तथा 750 से 770 Cm^{-1} क्षेत्र में बंधों की उपस्थिति से होती है जो कि क्रमशः बनन तथा बंकन विधा दर्शाते हैं। धातु संकर यौगिकों में कुछ नए बंध 500 – 550 Cm^{-1} तथा 400 – 480 Cm^{-1} तथा 290 से 300 Cm^{-1} क्रमशः V_{VM-0}, V_{M-N} तथा V_{M-Cl} विधा को दर्शाते हैं (सारणी क -2) ।[5]

डी ए बी सी शिफ क्षार के Ni(II) संकर यौगिक के इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रम में दो बैण्ड 12345 Cm^{-1} तथा 18180 Cm^{-1} पर प्राप्त होते हैं। तीसरा बैण्ड आवेश स्थानान्तरण बैण्ड है जो कि Ni(II) संकर यौगिक की वर्गसमतलीय ज्यामिति प्रदर्शित करते हैं। Cu (II) संकर यौगिक एक चौड़ा बैण्ड देता है जो कि 12658 Cm^{-1} तथा 16393 Cm^{-1} पर विभक्त होता है। लीगैण्ड क्षेत्र परिमाप मान सारणी क 3 में दर्शाये गये हैं। इस संकर यौगिक की विकृत अष्टफलकीय ज्यामिति सुझाई गई है।

डी ए बी बी शिफ क्षार के Ni (II) संकर यौगिक का इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रम 16393, 17543 तथा 21276 Cm^{-1} पर बैण्ड देते हैं। चुम्बकीय आघूर्ण का परिकलित मान 3.12 B.M. है जिसके आधार पर इस संकर यौगिक की अष्टफलकीय ज्यामिति स्पष्ट होती है । Cu (II) संकर यौगिक में दो बैण्ड 12195 Cm^{-1} तथा 21793 Cm^{-1} पर आते हैं। इन बैण्डों की उपस्थिति तथा अन्य आँकड़ों की सहायता से इस संकर यौगिक की वर्गसमतलीय ज्यामिति स्पष्ट होती है।

शिफ क्षार डी ए बी एन के Ni (II) संकर यौगिक तथा 22727 Cm^{-1} तथा 21793 Cm^{-1} पर आते हैं इन बैण्डों की उपस्थिति तथा अन्य आँकड़ों की सहायता से इस संकर यौगिक की वर्गसमतलीय ज्यामिति स्पष्ट होती है।

शिफ क्षार डी ए बी एन के Ni (II) तथा 22727 Cm^{-1} पर आते हैं। यह संकर यौगिक प्रतिचुम्बकीय है अतः इसकी वर्गसमतलीय ज्यामिति स्पष्ट होती है। प्रायोगिक रूप से Cu (II) संकर यौगिक दो बैण्ड् 12048 Cm^{-1} तथा 15873 Cm^{-1} पर दर्शाता है जो इसकी विकृत अष्टफलकीय संरचना के पक्ष में हैं।

शिफ क्षार डी० ए० बी० सी० के Ni (II) व Cu (II) संकर यौगिकों की बेसीलस सबटाइटिस तथा इश्चीरिया कोलाई के विरुद्ध जीवाणु रोधीक्रियाओं का अध्ययन 25 तथा 50 माइक्रोग्राम प्रति मिली० सांद्रण पर किया गया। Ni (II) संकर यौगिक Cu (II) संकर यौगिक की अपेक्षा अधिक क्रियाशील जीवाणुरोधी है।[9]

निर्देश

1. हागीज, एम० एन० : 'इनार्गेनिक केमिस्ट्री ऑफ बायोलॉजिकल प्रोसेसेज' विले, न्यूयॉ र्क (1981)

2. शर्मा, ए० के०, खेरा, बी० तथा कौशिक, एन० के० : ऑर्गेनिक केमिस्ट्री 1983 13 (4), 491.

3. अली, एच० एम०, इफ्तिखार, के० तथा अहमद् एन० : ऑर्गेनिक केमिस्ट्री (1984) **14 (4)** 1031-1045.

4. इफ्तिखार के०, अरविन्द एम०, सईद तथा अहमद, एन० : **इण्डियन जरनल ऑफ केमिस्ट्री** (1986, 25 (A), 589-591.

5. मिश्रा, ए० पी०, श्रीवास्तव, एस० के० तथा श्रीवास्तव, विभूति : **जरनल ऑफ इण्डियन केमिकल सोसायटी** 1997, 84, 487-488

6. नाकामेटो, के० : इन्फारेड स्पेक्ट्रा ऑफ अनॉर्गेनिक एम्ड कोऑर्डिनेशन कम्पाउन्डस, चतुर्थ संस्करण, विले इण्टरसाइन्स, न्यूयार्क (1986)

7. फिगिस, बी० एन० : 'इन्ट्रोडक्शन टू लीगैण्ड फील्ड थ्योरी, द्वितीय संस्करण, विले ईस्टर्न लिमिटेड, नई दिल्ली, (1976), 52.

8. लीवर, ए० बी० पी० : 'इनॉर्गेनिक इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रोस्कोपी, द्वितीय संस्करण, एल्सीवियर, एम्सटरडेम (1984)

9. पुरोहित, एम० तथा श्रीवास्तव, एस० के०, **जनरल ऑफ इण्डियन केमिकल सोसायटी,** (1991) , **68**, 163

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 2, April, 1998.

सार्वीकृत बेटमेन फलन वाले कतिपय समाकल समीकरण एवं उनके हल का एकीकरण

नीतू जोशी

गणित विभाग , शासकीय इंजीनियरिंग महाविद्यालय
उज्जैन (म० प्र०) 456 010

[प्राप्त—दिसम्बर 16, 1997]

सारांश

सार्वीकृत बेटमेन फलन के अष्टि वाले एक समाकल समीकरण का प्रतिलोमन प्रस्तुत किया गया है। प्रतिलोमन को दो प्रमेयों के माध्यम से दर्शाया गया है। प्राचलों के विशिष्टिकरण से पूर्व के अधिकांश शोधकर्ताओं के फल विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं।

Abstract

On the unification of some integral equations and their solutions invoving generalized Bateman's function. *By* Nitu Joshi, Department of Mathematics, Govt. Engg. College, Ujjain (M.P.).

An integral equation involving generalized Bate man's function as its kernel has been inverted. The inversions are given in the form of two theorems. By particularising the parameters the results of many previous investigators follow as special cases.

प्रस्तावना

विडर[9] द्वारा प्रस्तावित विधि का उपयोग करते हुए भारतीय[1] ने सार्वीकृत बेटमेन फलन की अष्टि वाले समाकल समावर्त का अध्ययन किया, तत्पश्चात् गुप्ता[4] ने एक समाकल समीकरण का हल

प्रस्तुत किया जिसका अष्टि बेटमेन फलन है। गुप्ता[5,6] और जोशी [7] ने भी इसी प्रकार के समाकल समीकरण से संबंधित कुछ प्रमेय प्रस्तुत किए हैं। प्रस्तुत शोध-पत्र का उद्देश्य समाकल समीकरण

$$\int_0^x K_{2n}^{2l}\ [a(x-t)g(t)dt = f(t) \tag{1.1}$$

का हल प्रस्तुत करना है जहाँ $K_{2n}^{2l}(ax)$ चक्रवर्ती[2] द्वारा परिभाषित सार्वीकृत बेटमेन फलन है। यहाँ स्थापित हल को दो विभिन्न प्रमेयों के माध्यम से दर्शाया गया है। प्राचलों के विशिष्टीकरण से पूर्व में प्राप्त सभी शोधकर्ताओं के हल विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं।

लाप्लास परिवर्त

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = F(p)$$

को हम निम्नांकित सांकेतिक रूप में प्रदर्शित करेंगे

$$f(t) \doteqdot F(p) \text{ अथवा } Lf(t) = F(p) \tag{1.2}$$

एर्डेल्यी [3, p. 129, 131, 175, 144] द्वारा निम्नलिखित फल ज्ञात हैं-

$$f(t) \doteqdot p^n F(p) \text{ यदि } f(0) = f^1(0) = \ldots f^{n-1}(0) = 0 \tag{1.3}$$

$$\int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\,du \doteqdot F_1(p) F_2(p)$$

जहाँ

$$f(t) \doteqdot F_1(p) \text{ और } f_2(t) \doteqdot F_2(p) \tag{1.4}$$

$$t^\alpha \exp(\lambda t) L_n^\alpha(Kt) \doteqdot \frac{(\alpha+n+1)!}{n!} \frac{(p-K-\lambda)^n}{(P-\lambda)^{\alpha+n+1}}$$

$$\operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}(p-\lambda) > 0 \tag{1.5}$$

$$t^{n-1}\exp(at) \doteqdot \frac{n!}{(p-a)^{n-1}} \tag{1.6}$$

सार्वीकृत बेटमेन फल का लाप्लास परिवर्त निम्नलिखित रूप में ज्ञात है [7]

$$K_{2n}^{2l}(at) \doteq \frac{(-1)^{n-l-1}(2a)^{2lH}(p-a)^{n-l-1}}{(p+a)^{n+l+1}} \tag{1.7}$$

एक अन्य सर्वज्ञात फल जिसका आगे प्रयोग किया जावेगा वह है

$$(D-a)^n f(t) = \exp(at) D^n [\exp(-at) f(t)] \tag{1.8}$$

2. इस खण्ड में हम दो अलग-अलग प्रमेयों के द्वारा समाकल समीकरण (1.1) का हल स्थापित करेंगे।

प्रमेय A : यदि

(1) n, β और γ धन पूर्णांक हों जहाँ $n+\gamma>1+ \ ,+1>\beta$ और $l>-1$

(ii) $f^{\beta+\gamma}(x)$, $0 \leq x < x_1 < \infty$ में खंडशः संतत हो और

(iii) $f^k(0)=0$ जहाँ $k=0,1,2,\ldots(\beta+\gamma-1)$ हो

तो समाकल समीकरण (1.1) का हल होगा-

$$g(t) = A \int_0^t (t-\gamma)^{\beta+\gamma-2l-3} \exp[a(t-y)]\, L_{n+l-\beta+1}^{\beta+\gamma-2l-3}[2a(y-t)].$$
$$(D+a)^{\beta}(D-a)^{\gamma} f(y)\, dy \tag{2.1}$$

जहाँ

$$A = \frac{(-1)^{n-l-1}(n+l-\beta+1)!}{(2a)^{2l+1}(n+\gamma-l-1)!} \tag{2.2}$$

उपपत्ति : माना कि

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{और} \quad g(t) \doteq G(p)$$

समाकल समीकरण (1.1) का लाप्लास परिवर्त लेने (1.4) और (1.7) का उपयोग करने तथा प्राप्त फल को पुनः व्यवस्थित करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

$$G(p) = A\left[\frac{(n+\gamma-l-1)!}{(n+l-\beta+1)!} \cdot \frac{(p+a)^{n+l-\beta+1}}{(p-a)^{(n+l\,\beta+1)+(\beta+\gamma-2l-3)+1}}\right]$$
$$\times (p+a)^{\beta}(p-a)^{\gamma} F(p)$$

जहाँ A का मान (2.2) द्वारा दर्शाया गया है।

उपर्युक्त फल के लाप्लास प्रतिलोम (1.4) एवं (1.5) के प्रकाश में (2.1) प्राप्त होता है।

विशिष्ट दशाएँ

यदि हम मानें कि

(i) $\beta=0, \gamma=l+2$ तो गुप्ता[6] द्वारा स्थापित प्रमेय I ज्ञात होता है।

(ii) $\beta=l+1, \gamma=l+2$ तो हमें गुप्ता[6] द्वारा स्थापित प्रमेय II प्राप्त हो जाता है।

(iii) $\beta=2l+3, \gamma=0$ रखने पर जोशी [7] द्वारा विवेचित प्रमेय II की प्राप्ति होती है।

(iv) $\beta=2l+2, \gamma=0$ से जोशी [7] द्वारा स्थापित प्रमय III सिद्ध होता है।

(v) $\beta=n+l+1, \gamma=0$ से जोशी [7] का प्रमेय I उपलब्ध हो जाता है।

प्रमेय B : यदि

(i) n , l और β धन पूर्णांक हैं जहाँ $n+l>\beta, l>-1, 2l+2\geq\beta$

(ii) $f^{2l+2}(x)$, $0\leq x<x<x_1<\infty$ में खंडशः सतत हों तथा

(iii) $f^k(0)=0$ जहाँ $k=0, 1, 2, \ldots (2l+1)$ हो तो

समाकल समीकरण (1.1) का हल होगा

$$g(t)=B\Big[(D+a)^{\beta}(D-a)^{2l+2-\beta}f(t)+2a\int_0^t \exp[a(t-y)]$$

$$L^{(1)}_{n+l-1^{\beta}}[2a(y-t)]\cdot(D+a)^{\beta}(D-a)^{2l+2-\beta}f(y)\,dy\Big] \tag{2.3}$$

जहाँ

$$B=\frac{(-1)^{n-l-1}}{(2a)^{2l+1}} \tag{2.4}$$

उपपत्ति :

प्रमेय A के अनुसार यहाँ पर भी समाकल समीकरण (1.1) का लाप्लास परिवर्त लेने, (1.4) और (1.7) का उपयोग करने तथा ज्ञात फल को पुनः व्यवस्थित करने पर

$$G(p) = B\left[1+\frac{2a}{(p-a)}\right]^{n+l-\beta+1}(p+a)^{\beta}(p-a)^{2l+2-\beta}F(p) \tag{2.5}$$

की प्राप्ति होती है।

चूँकि

$$\left[1+\frac{2a}{p-a}\right]^{N} = 1+L\left[\exp(at)\sum_{r=1}^{N}\binom{N}{r}(2a)^{\gamma}\frac{t^{r-1}}{r-1}\right]$$

$$= 1+L\left[\exp(at)\cdot 2aN\,{}_1F_1(-N+1;2;-2at)\right]$$

$$= 1+L\left[2a\exp(at)L_{N-1}^{(1)}(-2at)\right] \tag{2.6}$$

अब (2.5) का लाप्लास प्रतिलोमन (2.6) के प्रकाश में लेने पर (2.3) की प्राप्ति हो जाती है।

विशिष्ट दशाएँ : यहाँ

(i) $\beta = 0$ या $\beta = l+1$ रखने पर क्रमशः गुप्ता[6] द्वारा स्थापित प्रमेय III और प्रमेय IV की प्राप्ति हो जाती है।

(ii) $\beta = 2l+2$ से जोशी[7] द्वारा विवेचित प्रमेय IV प्राप्त होती है। इसी प्रकार प्राचलों के और विशिष्ट मान देने पर गुप्ता[4] तथा रूसिया[8] द्वारा स्थापित प्रमेय भी प्राप्त किये जा सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डॉ० बी० के०जोशी, रीडर गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरिंग कॉलेज, उज्जैन की हृदय से आभारी हूँ जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में आवश्यक मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. भारतीय, पी० एल० : Jour. Ind. Math. Soc. 1964, **28**, 163-167

2. चक्रवर्ती, एन० के० : Bull Cal. Math. Soc. 1953, **495**,1

3. एर्डेल्यी, ए० : Tables of Integral Transforms, Vol I McGraw Hill Pub. N.Y. 1954

4. गुप्ता, एच० एल० : **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1974, **17 (2),** 155-119

5. गुप्ता, एच० एल० : **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1980, **23** (2), 77-81

6. गुप्ता, एच० एल० : **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1981, **24 (3),** 279-283

7. जोशी, बी० के० : **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1975 **18 (4)**, 323 .

8. खसिया, के० सी० : Proc. Nat Acad. Sci. India, Sec. A 1967 **37,** 67-70

9. विड्डुर, डी० वी० : Amer. Math. Monthly, 1963, **70**, 291.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 2, April, 1998.

जोशी प्रभाव के लिये अधिशोषण क्रिया का ऊर्जा परिवर्तन तथा वायु में अर्ध-ओज़ोनित्र विसर्जनके दौरान जोशी प्रभाव का तापज आयनीय अनुरूप

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कॉलेज, मेरठ

[प्राप्त-जनवरी 15, 1998]

सारांश

वायु में अर्ध-ओज़ोनित्र विसर्जन के दौरान, 4.96-7.04 kV विभव परास, जिसमें $(\Delta_i)_L$ तथा $(\Delta_i)_T$ का सह-अस्तित्व था, जोशी प्रभाव $(\Delta_i)_L$, जोशी प्रभाव का ताप आयनीय अनुरूप $(\Delta_i)_T$ तथा $(\Delta_i)_{T+L}$ के परिणामों पर काल प्रभावन के प्रभाव का अध्ययन किया गया। 6.00 kv पर एक घंटे के काल प्रभावन से देहली विभव V_m का परिणाम 5.22 से 4.96 kV तक घट गया। 5 घंटे के काल प्रभावन से 5.48 kV पर -% $(\Delta_i)_L$ का मान 100 से घटकर 29 हो गया तथा अन्य विभवों पर किसी 'प्रभाव' का अवलोकन नहीं हुआ; जबकि तापज आयनीय उत्सर्जन के अन्तर्गत, -% $(\Delta_i)_T$ का मान शनैः-शनैः घटा और उच्च अनुप्रयुक्त क्षेत्रों में धनात्मक प्रभाव का अवलोकन हुआ। तापज इलेक्ट्रॉनों तथा प्रकाश के संयोजन के साथ समान परिणाम प्राप्त हुए। -% $(\Delta_i)_L$ तथा -% $(\Delta_i)_T$ के परिमाणों में प्रेक्षित ह्रास का कारण विसर्जन के दौरान निर्मित अधिशोषण-सदृश सीमान्त तल का प्रतिकूलन हो सकता है। इससे जोशी प्रभाव $(\Delta_i)_L$ के लिये जोशी-सिद्धान्त की पुष्टि होती है।

Abstract

Energetics of adsorption process for the Joshi effect and thermionic analogue of Joshi effect in air under semi-ozonizer excitation. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

The influence of aging on the magnitudes of the Joshi effect $(\Delta i)_L$, the thermionic analogue of Joshi effect $(\Delta i)_T$ and $(\Delta i)_{T+L}$ was carried out in air under semi-ozonizer excitation in the potential range 4.96-7.04 kV where (Δ_i) L and $(\Delta_i)_T$ co-occurred. Aging for an hour at 6.00 kV caused a decrease in the magnitude of the threshold potential V_m from 5.22 to 4.96 kV. After aging for 5 hours, the magnitude of -% $(\Delta i)_L$ at 5.48 kV from 100 to 29 and at other potentials, no 'effect' was observed. Whereas under thermionic emission, the magnitude of -% $(\Delta i)_T$ decreased gradually and at higher applied fields, positive effect was obtained. The results were similar under thermo-electrons and light to-gether. The observed decrease in the magnitudes of -% $(\Delta_i)_L$ and -% $(\Delta i)_T$ might be due to the deconditioning of the adsorption-like boundary-layer formed during discharge. This lends support to Joshi-theory for $(\Delta i)_L$

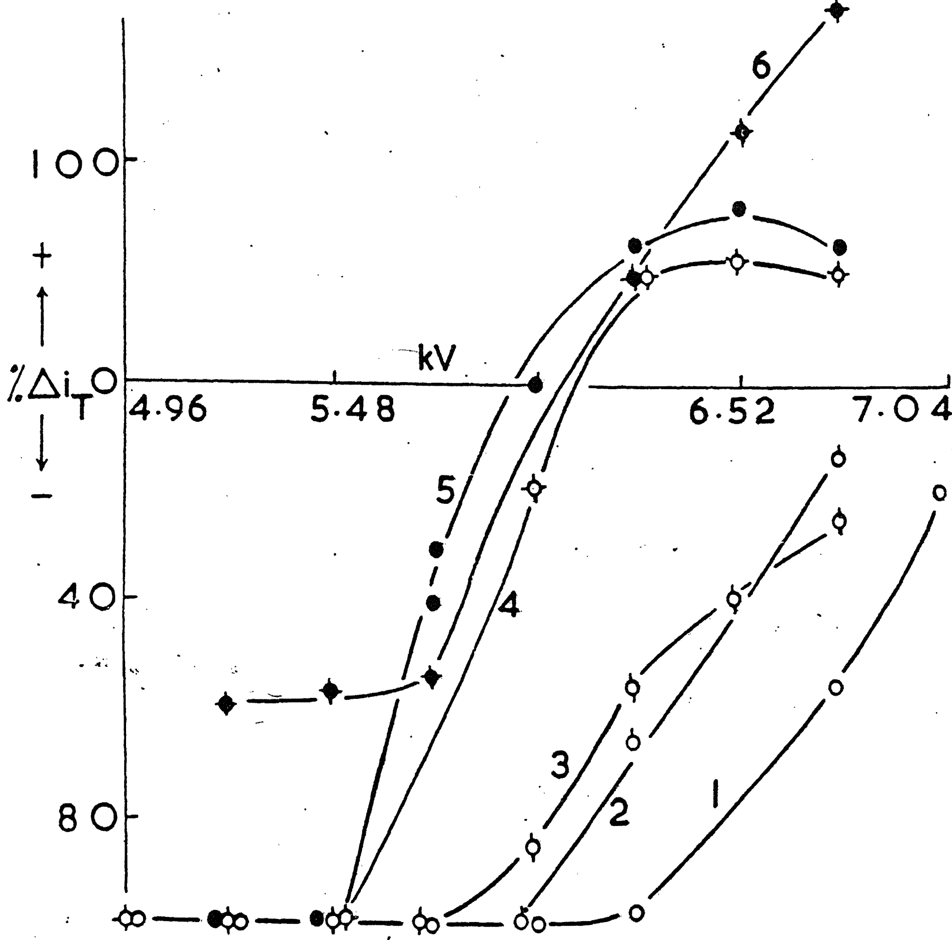
काल प्रभावन-अंधकार में स्थिर अनुप्रयुक्त क्षेत्र में निकाय को विद्युतीय विसर्जन का उद्भासन, को जोशी प्रभाव $(\Delta i)_L$ पर महत्वपूर्ण प्रभाव पर, इस घटना की खोज के तुरन्त बाद से ही जोशी ने बल दिया है।[1-3] ताज़ी बनी विसर्जन नली में, $(\Delta i)_L$ की उत्पत्ति तथा इसकी अधिकतम तक की वृद्धि के लिये, जो निकाय की विशेषता होती है, काल प्रभावन को आवश्यक पाया गया है।[4] यह सिद्ध करता है कि इलेक्ट्रोड-गैस अंतराप्रावस्था $(\Delta i)_L$ प्रभाव का मुख्य तल है। प्रयोग, जिनके परिणाम प्रस्तुत लेख में प्रस्तुत किये गए हैं, को यह देखने के लिये सम्पन्न किया गया कि जोशी प्रभाव $(\Delta_i)_L$ तथा इसका तापज आयनीय प्रारूप $(\Delta i)_T$ का अर्ध-ओज़ोनित्र के विसर्जन के उद्भासन के काल के साथ किस प्रकार परिवर्तित होता है।

प्रयोगात्मक

लम्बे समय से प्रयोग में आ रहे वायुयुक्त एक अर्ध-ओज़ोनित्र (p Air = 213 मिमी Hg, 30^0 C) को काल प्रभावन के प्रभाव का अन्वेषण करने के लिये प्रयुक्त किया गया। अन्वेषण 4.96-7.04 kV के विभव परास में किया गया, क्योंकि इस परास में $-(\Delta i)_L, -(\Delta i)_T$ तथा $-(\Delta i)_{T+L}$ के सह-अस्तित्व का अवलोकन हुआ। काल प्रभावन 5 घंटे तक किया गया और अंधकार में विकीर्णन के अन्तर्गत तथा तापज इलेक्ट्रॉनों के दौरान विसर्जन धारा मापन किया गया। प्रयोग विधि तथा प्रयुक्त विद्युतीय परिपथ पूर्व प्रकाशित विधि[5] के अनुसार थे।

परिणाम तथा विवेचना

काल प्रभावन के पूर्व दृश्य प्रकाश में तथा तापज इलेट्रॉनों के दौरान और दोनों को एकसाथ प्रयुक्त करने पर 5.22-6.26 kV विभव परास में ऋणात्मक प्रभाव 100% था। 6.00 kV पर काल प्रभावन से विभव परास में -100%$(\Delta i)_L$ या $(\Delta i)_T$ प्रेक्षित हुआ था वह घट गया (चित्र 1)।



चित्र 1 : 1-6 ऐम्पियर की तापक धारा i_F के द्वारा अर्ध-ओज़ोनित्र में वायु उत्तेजन के काल प्रभावन के दौरान विभव के साथ % $(\Delta_i)_T$ का परिवर्तन वक्र 1: कालप्रभावन पूर्व kV का % $(\Delta_i)_T$ के साथ सम्बन्ध ; 2, 3, 4, 5 तथा 6 क्रमशः 1, 2, 3, 4 तथा 5 घंटों की काल प्रभावन अवधि के बाद।)

6.00 kV पर एक घंटे के काल प्रभावन से Vm का मान 5.22 kV से घटकर 4.96 kV हो गया। प्रकाश तथा तापज आयनीय इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन के संयुक्त प्रभाव के भी प्रेक्षण समान प्रकार के थे। प्रकाश विकीर्णन या तापज आयनीय उत्सर्जन या दोनों के संयुक्त प्रयोग से किसी धनात्मक प्रभाव का प्रेक्षण नहीं हुआ।

एक अर्ध-चक्र में उत्पन्न इलेक्ट्रॉन एवेलांसों की संख्या विसर्जन-धारा में ह्रास का नियन्त्रण करती है। इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन पृष्ठ-कार्य-फलन के परिणाम पर निर्भर होता है। ताज़ी बनी विसर्जन नली में

पृष्ठ कार्य-फलन बहुत अधिक होता है। स्थिर अनुप्रयुक्त क्षेत्र में अल्प सामयिक कालप्रभावन कम कार्य फलन वाले अधिशोषण-सदृश सक्रियित सीमांत-तल की निर्मिति में सहायता करता है, जो $(\Delta i)_L$ की उत्पत्ति के लिये मुख्यतः उत्तरदायी है। काल प्रभावन को आगे बढ़ाने से $(\Delta i)_L$ का परिमाण अधिकतम तक बढ़ जाता है सक्रियित प्रकृति अर्थात् सीमांत-तल की अस्थिरता, जो जोशी-सिद्धान्त के अनुसार $-(\Delta i)_L$ के परिमाण का निर्धारण करती है, अधिक समय तक काल प्रभावन से घट जाती है।

ताप इलेक्ट्रॉनों के दौरान, $-(\Delta i)_T$ का परिमाण पर्याप्त घट गया और उच्च अनुप्रयुक्त क्षेत्रों में इसका $+(\Delta i)_T$ में परिवर्तन हो गया (चित्र 1) । इलेक्ट्रॉनों तथा उनके द्वितीयक जो संचित ऋणात्मक आयन अन्तराकाशी की रोधिका को पार करने से पलायन कर जाते हैं उनके कारण द्वितीय उत्क्रमण विभव V_i^{ii} के बाद इस $-(\Delta i)_T$ का $+(\Delta i)_T$ में उत्क्रण होता है। उत्सर्जन i_F के उच्च मान पर तापज इलेक्ट्रॉनों की अधिसंख्या में उत्पत्ति , बीटा तथा गामा-प्रक्रमों के कारण एवेलांशों की संख्या में वृद्धि के लिये मुख्य रूप से उत्तरदायी है। इस प्रकार उच्चतर विभवों पर तापज आयनीय उत्सर्जन के अन्तर्गत उच्च धनात्मक प्रभाव का प्रेक्षण हुआ है। जोशी-सिद्धान्त के अनुसार, निम्न तथा उच्च उत्तेजक विभव $+(\Delta i)_L$ के लिये अनुकूल होते हैं।[6] प्रस्तुत प्रेक्षण इसका अनुमोदन करते हैं।

दीर्घ-कालीन काल प्रभावन का $(\Delta i)_L$ पर प्रभाव पूर्ण-ओज़ोनित्र में अपर्याप्त तथा अर्ध-ओज़ोनित्र में प्रतिकूल होता है।[7] अर्ध-ओज़ोनित्र में इलेक्ट्रोडों की धात्विक प्रकृति के कारण, दीर्घकालीन काल प्रभावन के परिणामस्वरूप अस्थिरता में हानि, पूर्ण ओज़ोनित्र की तुलना में, अधिक होगी। [7] अतएव, अर्ध ओज़ोनित्र में काल प्रभाव से $-(\Delta i)_L$ घट जाता है, जैसा कि प्रस्तुत अन्वेषण में प्रेक्षण हुआ है। $-(\Delta i)_T$ या $-(\Delta i)_L$ या $-(\Delta i)_{T+L}$ के मानों में प्रेक्षित ह्रास भी विसर्जन के दौरान निर्मित अधिशोषण-सदृश तल के प्रतिकूलन के कारण प्रतीत होता है।

$-(\Delta i)_L$ के परिमाण पर प्रेक्षित दीर्घकालीन काल प्रभावन के प्रभाव से स्पष्ट संकेत मिलता है कि विसर्जन के दौरान इलेक्ट्रोड तलों पर होने वाली क्रियाएँ, अनुमानतः प्रकृति में रासायनिक का, $(\Delta i)_L$ उत्पत्ति की क्रियाविधि के नियन्त्रण में मौलिक महत्व है। [8, 9] इस प्रकार $-(\Delta i)_L$ तथा $-(\Delta i)_T$ के सह-अस्तित्व के परास में प्राप्त परिणाम $(\Delta i)_L$ के लिये जोशी-सिद्धान्त को एक और समर्थन प्रदान करते हैं।[10]

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० आर० जे० गलगली के अमूल्य सुझावों के लिये लेखक आभारी है।

निर्देश

1. जोशी, एस० एस० तथा देशमुख, जी० एस० : **नेचर**, 1941 **147,** 806

2. जोशी, एस० एस० तथा देव, पी० जी० : **वही** 1943, **151,** 561

3. देव, पी० जी०, **प्रोसी० इण्डियन साइंस कांग्रेस** 1943, **19**, 117

4. प्रसाद, जे० पी० : एच० डी० थीसिस, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी 1961; तथा

: **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका,** 1995, **38** (2), 111.

5. प्रसाद, जे० : **ऐक्टा सिएन्सिया इण्डिका,** 1974, **1**, 13

6. जोशी, एस० एस० : **करेण्ट साइंस,** 1947, **16**, 19.

7. रमैया, एन० ए० : **जर्न० साइं० रिसर्च,** बी० एच० यू०, 1950-51, 1, 91

8. रमनमूर्ति, एम० वी० : **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०,** 1948, **25**, 255

9. रमैया, एन० ए० : **जर्न० साइं० इण्डस्टि० रिस०** 1951, 10A, 182.

10. जोशी, एस० एस० : **प्रोसी० इण्डियन साइंस काँग्रेस,** 1947 *फिजि० सेक्ट० ऐब्स्ट* 26 तथा 27

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 2, April, 1998.

वर्मीकम्पोस्ट तथा गोबर की खाद का तुलनात्मक अध्ययन

शिवगोपाल मिश्र, संजीव त्रिपाठी तथा अरुण कुमार सिंह
शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान
इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद-211002

सारांश

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर वर्मीकम्पोस्ट तथा गोबर की खाद का तुलनात्मक प्रभाव ज्ञात करने के लिये एक प्रक्षेत्र प्रयोग किया गया। परीक्षण फसल के रूप में मेंथी का चुनाव किया गया। 1 × 1 वर्ग मीटर आकार के प्लाटों में वर्मीकम्पोस्ट और गोबर की खाद को 0.20,25, 30,35 तथा 40 टन प्रति हेक्टेयर की दर से डाला गया। बुवाई के 45, 60 तथा 75 दिनों के बाद पौधों की ऊँचाई मापी गयी तथा कटाई के बाद फसल का कुल जैव-भार ज्ञात किया गया। शुष्क पादप पदार्थ में नाइट्रोजन, फास्फोरस, पोटाश तथा कैल्सियम की मात्रा ज्ञात करने के लिये उसका रासायनिक विश्लेषण किया गया।

यह पाया गया कि वर्मीकम्पोस्ट की 40 टन प्रति हेक्टेयर की दर से प्रयोग किये गये प्लाट में अधिकतम वृद्धि हुई। नाइट्रोजन, फास्फोरस और पोटाश तत्वों का उद्ग्रहण वर्मीकम्पोस्ट और गोबर की खाद की बढ़ती मात्रा के अनुसार बढ़ा हुआ पाया गया परन्तु इन पोषक तत्वों का उद्ग्रहण वर्मीकम्पोस्ट प्रयोग किये गये प्लाट में अपेक्षाकृत अधिक पाया गया। फिर भी वर्मीकम्पोस्ट डाले गये सभी प्लाटों में कैल्शियम का उद्ग्रहण कम पाया गया।

Abstract

Comparative study of vermicompost and farm yard manure. *By* S. G. Misra, Sanjeev Tripathi and Arun Kumar Singh, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad-2.

A field experiment was conducted at Sheila Dhar Institute experimental farm in order to find out the comparative value of vermicompost and farm yard manure (F. Y. M.) Fenugreek was chosen as a test crop. Vermicompost and F. Y. M. were applied at the rates of

0, 20, 25, 30, 35 and 40 tons/hectare in micro plots of $1m^2$ size. The shoot growth was taken after 45,60 and 75 days of sowing and total biomass was determined after harvesting. The dried plant material was analysed for N, P, K and Ca contents. Maximum growth was observed where vermicompost was applied at the rate of 40 tons/ha. The uptake of N. P. K. increased with increasing doses of vermicompost and F. Y. M. but vermicompost led to higher uptake of these nutrients. However, the uptake of Ca was lower with vermicompost at all the doses.

सम्पूर्ण विश्व में पालतू पशुओं से काफी मात्रा में कार्बनिक अपशिष्ट पदार्थ उत्पन्न होता है। विकसित देशों में बढ़ते हुए विशिष्ट कृषि उत्पादनों से कृषि भूमि पर इन अपशिष्टों का निपटान एक बहुत बड़ी समस्या बनी हुई है। इसी प्रकार उद्यानों एवं खाद्य संसाधन उद्योगों में काफी मात्रा में सब्जी के अपशिष्ट उत्पन्न होते हैं। इन अपशिष्टों का भी निपटान काफी खर्चीला है। इतना ही नहीं कि ये दुर्गन्ध की समस्या उत्पन्न करते हैं बल्कि ये भूमिगत जल को भी प्रदूषित करते हैं किन्तु केचुओं के द्वारा कार्बनिक अपशिष्टों का अपघटन करके लाभदायक कम्पोस्ट में बदलकर पर्यावरणीय प्रदूषण को कम किया जा सकता है।[1]

केचुए पौधों के अवशिष्टों का अपघटन करने वाले महत्वपूर्ण कारक हैं जो सूक्ष्मजीवों के लिये अच्छा वातावरण प्रदान करते हैं। वे काफी मात्रा में भूमि को नीचे से ऊपर लाते हैं और अन्ततोगत्वा अपघटित पादप पदार्थ के साथ मिला देते हैं। मृदा में खनिज पोषक तत्वों की उपलब्धता पर केंचुए के अच्छे प्रभाव का यह एक उदाहरण है। कृमि मल में कार्बन नाइट्रोजन अनुपात जिस मिट्टी में केचुए रहते हैं इसकी अपेक्षा अधिक पाया जाता है। पैतृक मृदा की अपेक्षा कृमिमल (worm-cast) में नाइट्रोजन अधिक पाया जाता है। इतना ही नहीं, जिस मिट्टी में केंचुए रहते हैं इसकी अपेक्षा कृमिमल में क्षार विनिमय क्षमता, विनिमय योग्य कैल्शियम, मैग्नीसियम, पोटाश तथा उपलब्ध फास्फोरस अधिक मात्रा में पाया जाता है। [2, 3, 4]

वर्मीकम्पोस्ट में कार्बनिक पदार्थ एवं पोषक तत्वों की उपलब्धता को दृष्टि में रखते हुए वर्मीकम्पोस्ट और गोबर की खाद का तुलनात्मक प्रभाव ज्ञात करने के लिये विभिन्न स्तरों का मेथी की फसल पर पादप वृद्धि एवं उसके ताजा भार पर एक प्रक्षेत्र प्रयोग किया गया। फसल के द्वारा पोषक तत्वों के उद्ग्रहण भी ज्ञात किया गया।

प्रयोगात्मक

वर्मीकम्पोस्ट तैयार करने के लिये एक छिद्र युक्त लकड़ी का बक्सा लिया गया जिसका आकार 60 सेमी० × 40 सेमी० × 20 सेमी० था। इसमें 17 किग्रा० कार्बनिक अपशिष्ट पदार्थ डाला गया। 15 दिन बाद 100 केंचुए डाले गये एवं नमी बनाये रखने हेतु बक्से में समय-समय पर पानी डाला गया। 45 दिन के बाद 9.0 किग्रा० वर्मीकम्पोस्ट तैयार हुआ। इस वर्मीकम्पोस्ट का प्रयोग प्रक्षेत्र प्रयोग के लिये किया गया। गोबर की खाद गाँव से प्राप्त की गयी।

शीलाधर प्रायोगिक फार्म पर 1 × 1 मी०, आकार के प्लाट यादृच्छिक ब्लाक अभिकल्पन (R.B.D.) के अनुसार लिये गये। वर्मीकम्पोस्ट और गोबर की खाद को 0, 20, 25, 30, 35 और 40 टन प्रति हेक्टे० की दर से विभिन्न प्लाटों में डाला गया। इन प्लाटों में मेथी के बीज बोये गये। पौधों की ऊँचाई 45, 60 तथा 75 दिनों पर मापी गयी। फसल की कटाई, बुवाई के 75 दिन बाद की गयी तथा कुल ताजा जैव भार ज्ञात किया गया।

पौधे के शुष्क पदार्थ में नाइट्रोजन, फास्फोरस, पोटास तथा कैल्सियम की मात्रा ज्ञात करने के लिये रासायनिक विश्लेषण किया गया। इसके लिये चोपरा एवं कंवर के द्वारा बताई गई मानक विधियों का प्रयोग करते हुए पादप सार (Plant extract) तैयार किया गया।[6] सारणी 1-3 में प्राप्त परिणाम दिये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 में दिये गये मेथी की बढ़वार के परिणामों से स्पष्ट है कि वृद्धि की विभिन्न अवस्थाओं में वर्मीकम्पोस्ट गोबर की खाद की अपेक्षा अधिक लाभदायक है।

सारणी 1

मेथी के पौधे की बढ़वार (सेमी)

उपचार	बुवाई के 45 दिन बाद	बुवाई के 60 दिन बाद	बुवाई के 75 दिन बाद
नियंत्रण	6.0	7.7	14.7
वर्मीकम्पोस्ट (20 टन/हे०)	7.5	10.7	17.1
वर्मीकम्पोस्ट (25 टन/हे०)	8.2	11.0	18.0
वर्मीकम्पोस्ट (35 टन/हे०)	8.7	11.5	19.5
वर्मीकम्पोस्ट (35 टन/हे०)	9.1	12.2	20.9
वर्मीकम्पोस्ट (40 टन/हे०)	11.0	13.5	22.1
गोबर की खाद (20 टन/हे०)	6.2	8.0	15.1
गोबर की खाद (25 टन/हे०)	6.6	8.3	15.8
गोबर की खाद (30 टन/हे०)	6.9	8.7	16.3
गोबर की खाद (35 टन/हे०)	7.5	9.0	17.0
गोबर की खाद (40 टन/हे०)	8.1	9.9	17.3

गोबर की खाद की तुलना में वर्मीकम्पोस्ट से उपचारित प्लाटों के पौधों की लम्बाई में 20% तक वृद्धि पायी गयी। सारणी 2 में दिये गये वर्मी कम्पोस्ट के परिणाम प्रदर्शित करते हैं कि 40 टन प्रति हे० की दर से डाले गये गोबर की खाद की तुलना में पौधे के ताजे जैव भार को अपेक्षाकृत बढ़ा देती है। नियंत्रण प्लाट की तुलना में पौधे के ताजे जैव भार में 20-153% वृद्धि पायी गयी। संभवतः यह वृद्धि वर्मीकम्पोस्ट में उपलब्ध नाइट्रोजन, फास्फोरस एवं पोटाश के अत्यधिक उद्ग्रहण के कारण हुई।

सारणी 2

मेथी की उपज

उपचार	जैवभार (ग्रा०/मी०^2)	नियन्त्रण की तुलना में प्रतिशत वृद्धि
नियन्त्रण	300	—
वर्मीकम्पोस्ट (20 टन/हे०)	360	20.0
वर्मीकम्पोस्ट (25 टन/हे०)	440	46.6
वर्मीकम्पोस्ट (30 टन/हे०)	480	60.0
वर्मीकम्पोस्ट (35 टन/हे०)	600	100.0
वर्मीकम्पोस्ट (40 टन/हे०)	760	153.1
गोबर की खाद (20 टन/हे०)	310	3.3
गोबर की खाद (25 टन/हे०)	330	10.0
गोबर की खाद (30 टन/हे०)	360	20.0
गोबर की खाद (35 टन/हे०)	390	30.0
गोबर की खाद (40 टन/हे०)	410	36.6

मेथी के पोषक तत्वों की मात्रा पर प्रभाव

सारणी—3 बताती है कि पौधे के शुष्क पदार्थ में नाइट्रोजन की मात्रा गोबर की खाद से उपचारित प्लाटों की अपेक्षा वर्मीकम्पोस्ट से उपचारित प्लाटों में अधिक है। यह बहुत ही रोचक है कि शुष्क पौध पदार्थ में कैल्सियम की मात्रा वर्मीकम्पोस्ट से उपचारित प्लाटों में गोबर की खाद से उपचारित प्लाटों की तुलना में कम है यह संभवतः अपशिष्टों से तैयार किये गये वर्मीकम्पोस्ट में कैल्सियम की निम्न उपलब्धता के कारण है।

सारणी 3

मेथी के पौधे में नाइट्रोजन, फास्फोरस एवं कैल्सियम की मात्रा

उपचार	नाइट्रोजन %	फास्फोरस p.p.m	पोटास p.p.m.	कैल्सियम p.p.m
नियंत्रण	1.31	42	54	14
वर्मीकम्पोस्ट (20 टन/हे०)	1.42	56	176	12
वर्मीकम्पोस्ट (25 टन/हे०)	1.53	60	190	10
वर्मीकम्पोस्ट (30 टन/हे०)	1.61	62	171	14
वर्मीकम्पोस्ट (35 टन/हे०)	1.81	60	169	24
वर्मीकम्पोस्ट (40 टन/हे०)	2.31	104	180	26
गोबर की खाद (20 टन/हे०)	1.39	46	110	39
गोबर की खाद (25 टन/हे०)	1.45	58	118	34
गोबर की खाद (30 टन/हे०)	1.49	74	130	28
गोबर की खाद (35 टन/हे०)	1.76	60	105	46
गोबर की खाद (40 टन/हे०)	1.92	60	124	52

कार्बनिक पदार्थ से समृद्ध वर्मीकम्पोस्ट, पौधों के लिये आवश्यक पोषक तत्वों को धारण करने की क्षमता होती है। जैसे-जैसे कम्पोस्ट अपघटित होता है, पोषक तत्व मुक्त होते रहते हैं तथा उगे हुए पौधों को उपलब्ध होते रहते हैं। गोबर की खाद से वर्मीकम्पोस्ट की श्रेष्ठता मेथी की उच्च पादप वृद्धि, जैवभार तथा पोषक तत्वों के उद्ग्रहण से स्पष्ट है। वर्मीकम्पोस्ट को 40 टन प्रति हेक्टेयर की दर से प्रयोग करके सर्वोत्तम परिणाम प्राप्त किया जा सकता है। इसलिये सब्जी उत्पादकों को सलाह दी जा सकती है कि वे अधिकतम उत्पादन प्राप्त करने हेतु वर्मीकम्पोस्ट के उच्च दरों का प्रयोग करें।

निर्देश

1. एडवर्ड्स, सी० ए, बरोज, आई० तथा जोन्स, बी० ए० : The use of earthworms for composting Farm wastes. In composting of agricultural and other wastes. p.p. 229-242. Edited by J.K. R. Gassor.

2. ग्रैफ, ओ० : Ann. Anim. Zool Ecol. Spec. Publ. 1971, **4**, 5503-512.

3. निझवान, एस० डी० तथा कॅवर, जे०जे० : Ind. J. Agric. Sci. 1952, **22**, 357-373.

4. पुह, पी० सी० : Biol. Lab. Sci. Soc. China. 1941, **15**, 147-155.

5. सैचल, जे० ई० : Nitrogen turnover by a Woodland population of Lumbricus terrestries in soil organisms. North Holl and Publishing co., Amsterdam. 1963, pp. 60-66.

6. चोपरा, एस० एल० तथा कॅवर, जे० एस० : Analytical Agricultural Chemistry, Kalyani Publishers (New Delhi). Fourth Edition 1991.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 2, April, 1998.

2 मेथिल आक्सीन के साथ कतिपय कार्बनिक यौगिकों के क्षारीय धातु लवणों के मिश्रित लिगैंड संकुल

धर्मप्रकाश, अमरेन्द्र प्रसाद राय तथा ओउम प्रकाश गुप्ता
रसायन विभाग, पटना विश्वविद्यालय (बिहार)

[प्राप्त -अक्टूबर 15, 1993]

सारांश

ML. HL′ प्रकार के अनेक मिश्रित लिगैंड क्षारीय धातु संकुलों (जहाँ M =Li,Naया K;L= विप्रोटानीकृत *O*-नाइट्रोफीनॉल सैलिसिलिक अम्ल तथा 1-नाइट्रोसो-2- नैफ्थाल तथा HL′ = 2 मेथिल-अक्सीन को विलगित करके तात्विक विश्लेषण, चालकता तथा अवरक्त स्पेक्ट्रमी अध्ययनों के द्वारा उनकी पहचान की गई है।

Abstract

Mixed ligand complexes of alkali metal salts of some organic compounds with 2-methyl-oxine. *By* Dharm Prakash, Amarendra Prasad Roy and Om Prakash Gupta, Chemistry Department, Patna University, Patna (Bihar).

A number of mixed ligand alkali metal complexes of the type ML. HL′, where M=Li, Na or K; L= deprotonated *o*-nitrophenol, salicylic acid and 1- nitroso-2-naphthol and HL′=2-methyl-oxine have been isolated and characterised by elemental analysis, conductance and infrared spectral studies.

8-हाइड्राक्सीक्विनोलीन (आक्सीन)[1-3] तथा 8- हाइड्राक्सी क्विनोलीन N- आक्साइड[4] के साथ क्षारीय धातुओं के उपसहसंयोजन आचरण का विस्तार से अध्ययन किया जा चुका है। इस प्रपत्र मे क्षारीय धातु आयनों के प्रति 2-मेथिल आक्सीन के संकुलन आचरण की सूचना दी जा रही है।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त *o*-नाइट्रोफीनॉल, सैलिसिलिक अम्ल, 1-नाइट्रोसो-2-नैफ्थॉल (HL) तथा 2-मेथिल-ऑक्सीन (HL') वैश्लेषिक कोटि के अभिकर्मक थे।

HL के क्षारीय धातु लवणों की तैयारी

o-नाइट्रोफीनॉल, सैलिसिलिक अम्ल या 1-नाइट्रोसो-2-नैफ्थॉल तथा क्षारीय धातु हाइड्राक्साइड को 1:1 अणु अनुपात में लेकर 95% एथेनॉल में 80 सें० पर 1 घंटे तक चुम्बकीय विलोडक की सहायता से पश्चवाहित किया। विलगित लवण को छान कर एथनॉल से धोया गया और वैद्युत-भ्राष्ट में 80 से० पर सुखाया गया।

मिश्रित लिगैंड संकुल तैयार करना

लिगैंड HL तथा 2- मेथिल आक्सीन (HL') के क्षारीय धातु-लवणों को 1:1 के अनुपात में एक शंक्वाकार पलिघ में परम ऐल्कोहाल में डाला गया। मिश्रण को चुम्बकीय विलोडक पर दो-तीन घंटे तक पश्चवाहित किया गया। शीतलन के उपरान्त धारीय-धातु योगोत्पाद अवक्षेपित हो गये जिन्हें छान कर एथेनॉल से धोया गया और वैद्युत-भ्राष्ट में 80^0 पर सुखा लिया गया।

परिणाम तथा विवेचना

प्राप्त द्वितीय लिगैंड तथा नवीन मिले-जुले संकुल ML. HL′ के कतिपय भौ तिक गु णाधर्म सार[?] में सूचीबद्ध हैं।

सामान्यतया मिले-जुले संकुल रंगीन हैं, KSal. A. HL′ अपवाद है। ये ध्रुवीय विलायकों में विलेय हैं किन्तु बेंजीन, ईथर जैसे अध्रुवीय विलायकों में अविलेय हैं। ये संकुल शुष्क अवस्था में जब इन्हें अनार्द्र ठोस $CaCl_2$ के ऊपर डेसीकेटर में रखा जाता है- स्थायी हैं। किन्तु संगत लिगैंड गलनांक से उच्चतर तापों पर या तो ये विघटित हो जाते हैं या इनमें परिवर्तन आ जाता है।

चालकताएँ

समस्त संकुलों की आणविक चालकताएँ मेथेनॉल में 10^{-3} M सान्द्रता पर 25^0 से० पर मापी गई।

इनमें से किसी भी संकुल की आणविक चालकता आदर्श तक यानी 1:1 विद्युद्विश्लेष्य तक नहीं पहुँच पाती। किन्तु उल्लेखनीय है कि इन उदासीन संकुलों की आणविक चालकताओं के न्यून मान यह इंगित करने वाले हैं कि ये अविद्युद्विश्लेष्य हैं। यह निष्कर्ष बनर्जी इत्यादि के प्रेक्षण [5] की पुष्टि करने वाला है।

सारणी 1

यौगिक	रंग	गलनांक / विघटन/क्रान्तिक ताप °C)	चालकता (ohm^{-1} cm^2 $mole^{-1}$)	(%) प्राप्त/परिगणित			
				C	H	N	M
2-मेथिल-आक्सीन (HL′)	श्वेत	74 m					
LiONP. HL′	पीत	250d	5.1	63.15 (63.16)	4.25 (4.28)	9.20 (9.21)	
NaONP. HL′	पीत	235 t	6.3	59.80 (60.00)	3.98 (4.06)	8.70 (8.75)	7.11 (7.18)
KONP.HL′	पीत	225d	7.7	56.80 (57.14)	3.88 (3.86)	8.25 (8.33)	11.35 (11.61)
KSalA. HL′	श्वेत	180 m	8.3	49.25 (50.85)	4.20 (4.17)	4.19 (4.17)	11.65 (11.81)
Na1N2N. HL′	भूरा	220 m	7.6	66.98 (67.70)	4.25 (4.23)	7.80 (7.90)	6.51 (6.49)
K1N2N.HL′	भूरा	230 d	8.8	65.20 (64.79)	4.10 (4.04)	7.50 (7.55)	10.28 (10.63)

सारणी -2

लिगेंड तथा संकुलों के मुख्य 1R आँकड़े (cm^{-1})

यौगिक	– OH	– C = N
2-मेथिल-आक्सीन (HL′)	3400 br	1605 m
LiONP. HL′	2720 br	1620 sh, 1580 m
NaONP. HL′	2850 br	1628 s, 1545 s
KONP. HL′	2500 br, 1900-1800 br	1610s, 1570 m
Na1N2N.HL′	2250 br, 1950 br	1640 sh, 1575 s
K1N2N.HL′	2650 br, 2250 br	1640 m, 1580 m
KSalA. HL′	2750 br, 2650 br	1625 m, 1605 m, 1580 m

s = प्रबल, br = चौड़ा, sh = शोल्डर, m = मध्यम

अवरक्त स्पेक्ट्रा

अज्ञात मिश्रित लिगैंड क्षारीय धातु संकुलों (ML. HL′ जहाँ M = Li, Na K, L -विप्रोटानीकृत *o*-नाइट्रोफीनॉल, सैलिसिलिक अम्ल तथा नाइट्रोसो-2 नैफ्थाल एवं HL′=2 मेथिल ऑक्सीन हैं। के अवरक्त मापन KBr प्रावस्था में 4000-65cm^{-1} के क्षेत्र में स्पेक्ट्रोफोटोमीटर की सहायता से किये गये। प्राप्त IR आँकड़े सारणी 2 में अंकित किये जा रहे हैं।

2-मेथिल ऑक्सीन के स्पेक्ट्रा में 3400 cm^{-1} पर मध्यम चौड़ा अवशोषण पट्ट दिखता है जो हाइड्रोजन बन्धन की उपस्थिति को बतलाने वाला है।

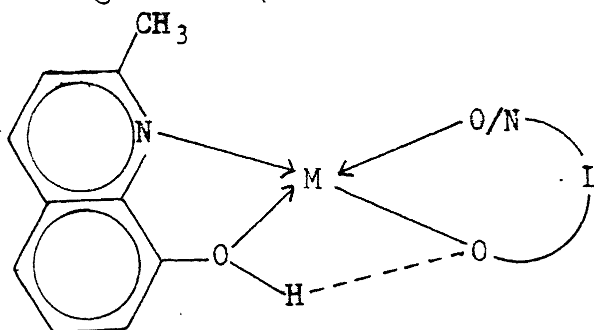
लिगैंड 2-मेथिल आक्सीन के मिश्रित लिगैंड, संकुलों में चौड़े अवशोषण पट्ट 3400 cm^{-1} से विस्थापन करके 2700-1900 cm^{-1} क्षेत्र में पहुँच जाते हैं। इससे प्रबल हाइड्रोजन बन्धन की उपस्थिति अनुमानित है। इनमें से कोई भी मिश्रित लिंगैड संकुल 1100-700 cm^{-1} के मध्य असंगत चौड़ा अवशोषण पट्ट प्रदर्शित नहीं करता ।

लिगैंड 2-मेथिल ऑक्सीन का IR स्पेक्ट्रा 1605 cm^{-1} पर ν C=N का विशिष्ट अवशोषण पट्ट प्रदर्शित करता है। सभी मिश्रित लिगैंड संकुलों में पट्टों का विस्थापन 10-35 cm^{-1} पाया गया। इन सभी संकुलों में विस्थापन ने इसी क्षेत्र में ($\nu_{1600}\, cm^{-1}$)एक अन्य अवशोषण पट्ट प्रदर्शित किया जो कार्बनिक अम्ल (प्रथम लिगैंड) के विभिन्न क्षारीय धातु ऋणायनों $-NO_2$, COO^- पट्ट तथा -N = O की उपस्थिति के कारण हो सकता है।

$\nu\, C=N$ के लिये 10-35 cm^{-1} तक निम्नतर आवृत्ति में विस्थापन लिगैंड के क्षारीय धातुओं के साथ क्विनोलीन वलय के नाइट्रोजन परमाणु के माध्यम से उपसहसंयोजन को सूचित करता है।

संरचना तथा बंधन

तात्विक विश्लेषण, चालकता मापन तथा IR स्पेक्ट्रा आँकड़ों के अध्ययन के आधार पर क्षार धातुओं के मिश्रित लिगैंड संकुलों की निम्नवत् सम्भावित संरचना प्रस्तावित की जाती है।



जहाँ M = Li, Na या K



कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से एक (ओ० पी० गुप्ता) विश्वविद्यालय अनुदान आयोग, नई दिल्ली के प्रति अभार व्यक्त करता है जहाँ से उसे शिक्षक छात्रवृत्ति प्रदान की गई।

निर्देश

1. हाजेस, डी० एल० तथा ट्रटर, एम० आर० : J. Chem. Soc., Dalton, 1979, 1520
2. प्रकाश, धर्म तथा सिंह, एस० पी० : Polyhedron, 1984, **3**, 243.
3. बनर्जी, ए० के०, प्रकाश, धर्म तथा राय, एस० के० : J. Ind. Chem. Soc., 1976, **53**, 465.
4. प्रकाश, धर्म तथा सिंह, एस० पी० : J. Ind. Chem. Soc., 1985, **62**, 424.
5. बनर्जी, ए० के०, लेटन, ए० जे०, नाइहोम आर० एस० तथा ट्रटर, एम० आर० : J. Chem. Soc. (A), 1969, 2536.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 2, April, 1998.

राजस्थान के आदिवासियों द्वारा बाँस का उपयोग

सतीश कुमार शर्मा

क्षेत्रीय वन अधिकारी,
अरावली वृक्षारोपण परियोजना,
झाडोल (फ०), जिला उदयपुर (राज०)

[प्राप्त-नवम्बर 3, 1997]

सारांश

नृवानस्पतिक दृष्टि से बहुउपयोगी बाँस आज अतिदोहन के कारण दबाव का सामना कर रहा है। आदिवासियों द्वारा बाँस अनेकानेक घरेलू कार्यों में उपयोग में लाया जाता है। इसे गरीब व्यक्ति की 'इमारती लकड़ी' भी कहा जाता है। यह गृह-निर्माण, कृषि-उपकरण, खिलौने, लोकदवाओं, हथियार, बाड़बन्दी आदि में उपयोग किया जाता है। बाँस का धार्मिक-सांस्कृतिक महत्व भी है। प्रस्तुत पत्र में बाँस के लगभग छः दर्जन उपयोगों की चर्चा की गई है।

Abstract

Use of bamboo by tribals of Rajasthan. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Aravalli Afforestation Project, Jhadol (F.) 313702, Dist. Udaipur (Raj.).

One of the most important plant species ethnobotanically for Rajasthan - *Dendrocalamus strictus* is under pressure due to unchecked over exploitation. Bamboo is used by the tribals in a variety of domestic ways. This is popularly called as poorman's timber and used in hut construction, agricultural implements, toys, folk-medicines, weapon making, fencing etc. Bamboo has a reputable place in religio-cultural sector of tribal life also. In the present paper nearly 6 dozen uses of bamboo have been described.

बाँस को गरीब की 'इमारती लकड़ी' कहा जाता है। बाँस एक ऐसा महत्वपूर्ण वन-उत्पाद है जिसका आदिवासियों, विशेषकर वनों के अन्दर एवं वनों के कोर-छोर पर निवास करने वाले आदिवासियों, के जीवन में बहुत महत्व है। जिन वनों में बाँस प्राकृतिक रूप से उगता है उन वनों के आदिवासियों ने बहुत ही विविधतापूर्वक बाँस का उपयोग किया है।

राजस्थान में निवास करने वाली अनेक जातियों ने बाँस को बहुत व्यापक रूप से अपनाया है परन्तु प्रस्तुत प्रपत्र में राजस्थान के आदिवासियों द्वारा बाँस के उपयोग की चर्चा विस्तार से की गई है।

राजस्थान के वनों में उगने वाला आम बाँस **डैन्ड्रोकैलामस स्ट्रीक्ट्स** (*Dendrocalamus strictus*) जाति का है जिसे राजस्थान की विभिन्न बोलियों मे वहांडा, बांसडा, कामड़ा आदि नामों से भी जाना जाता है। उपर्युक्त के अलावा *Bambusa arundinacea* तथा *Bambusa Vulgaris* भी सीमित क्षेत्रों में पाये जाते हैं।

प्रयोगात्मक

अध्ययन क्षेत्र

प्रस्तुत अध्ययन राजस्थान के दक्षिण भाग एवं गुजरात के उत्तरी भाग में वर्ष 1986 से 1996 तक कया गया। राजस्थान के उदयपुर, राजसमंद, चित्तौड़गढ़, भीलवाड़ा, सिरोही, डूंगरपुर, बांसवाडा एवं गुजरात के साबरकांठा तथा बनासकांठा जिले कां विशेष सर्वे किया गया ।

बांस अरावली पर्वतमाला की एक महत्वपूर्ण वनस्पति है। अरावली पर्वतमाला गुजरात से प्रारम्भ हो कर राजस्थान में तिरछी बढ़ती हुई दिल्ली रिज के रूप में दिल्ली के पास समाप्त हो जाती है। यों तो पूरी अरावली में बाँस मिलता है परन्तु राजस्थान में अरावली के दक्षिण भाग में बाँस अधिकता से पाया जाता है। अतः बांस-बहुल इसी क्षेत्र में विशेष सर्वे किया गया।

अध्ययन क्रिया

वन क्षेत्र के निवसी झीलों के घर, खेत, कुओं आदि का समय-समय पर अवलोकन किया गया तथा उनके उपयोग की वस्तुओं की जानकारी प्राप्त की गई। आदिवासियों के त्यौहार, शादी-विवाह, मृत्यु एवं मृत्यु-भोज के अवसर, पूजा-पाठ मेलों आदि के अवसरों पर उपस्थित हो कर बाँस के उपयोग देखे गये। बुजुर्गों से भी अनेकों जानकारियाँ प्राप्त की गई।

परिणाम तथा विवेचना

भील लोग बाँस पर अत्यधिक निर्भर हैं। वे बाँस की आपूर्ति मुख्यतया राजकीय वनों से करते हैं। अल्प मात्रा में अपनी निजी भूमि पर उगाये गये बाँस का उपयोग भी करते हैं। बाँस को ताजा हरा काट कर या सुखा कर, साबुत या फाड़ कर उपयोग किया जाता है। नव क्षेत्रों से प्रायः रात्रि

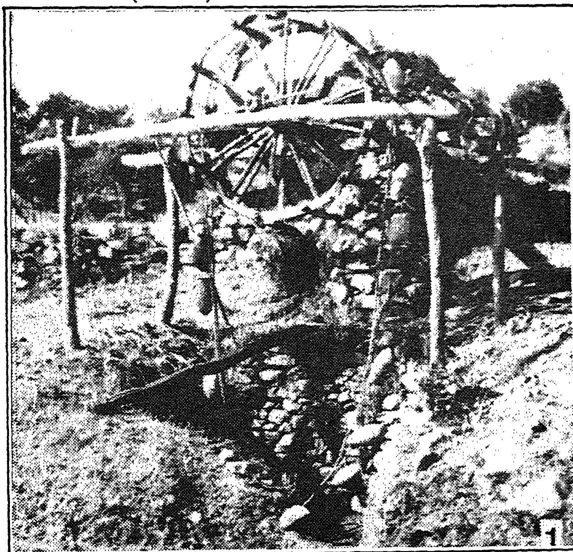
को चोरी-छिपे गुप्त पहाड़ी पगडंडियों और रास्तों से बाँस निकाला जाता है। कई बार नदी-नालों के पानी के बहाव का उपयोग भी बाँस के निकास में किया जाता है। बहाव द्वारा बांस-निकास प्रायः सितम्बर माह में उस समय किया जाता है जब बहाव का स्तर एवं गति अनुकूल हो जाती है तथा मानसून लगभग विदा हो जाता है।

राजस्थान में बाँस का व्यापक एवं विविध उपयोग भील, कथौडी, डामोर, भील मीणा, सहारिया, गरासिया आदि आदिवासियों द्वारा किया जाता है। कुछ उपयोगों का संक्षिप्त ब्योरा इस प्रकार है।

घरेलू सामान एवं घर निर्माण में उपयोग

टाटा : हरे बांस को फाड़ कर अलग-अलग आकार की मजबूत चटाइयाँ बनाई जाती हैं जिन्हें "टाटा" कहते हैं। लकड़ी के चार खम्भे घर से सटा कर या घर से कुछ दूर गाड़ उन पर मजबूती से टाटा बांध दिया जाता है। इस रचना को 'डागला' कहते हैं। डागले को रात्रि-शयन, घास-संग्रह, महुवा एवं अन्य वन्य एवं कृषि उत्पाद सुखाने के कार्य में किया जाता है। गर्मियों में डागले की छाया में मवेशी बाँधे जाते हैं।

माल : हरे बाँस की पतली फड़ानों को गूँथ कर रस्सा बनाया जाता है जिसे माल कहते हैं। गृह-निर्माण के दौरान छत बनाने हेतु लकड़ियों के ढाँचे को बाँधने से लेकर रँहट का रस्सा (माल) भी बाँस से बनाते हैं। परन्तु रँहट में सबसे अच्छा रस्सा ढाक (Butea Monosperma) की जड़ के रेशों से बनता है (चित्र 1)



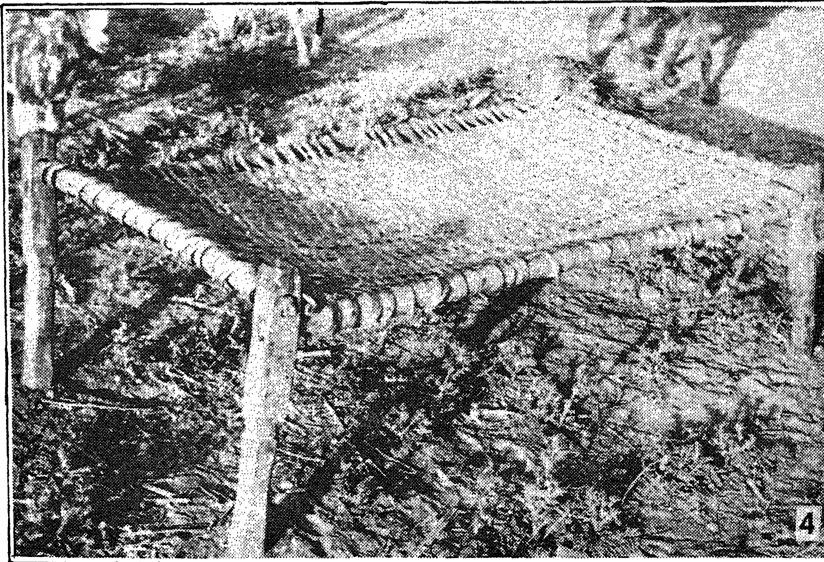


चित्र 1. रहट का रस्सा बनाने तथा गेड बाँधने में बाँस का उपयोग होता है।
चित्र 2. घास व चारे को सर-भार द्वारा परिवहन करने का खूटिया।
चित्र 3. घास व चारे को सर-भार द्वारा परिवहन करने का हेरणा।

खूटियाँ : बाँस का एक 200-240 सेमी० लम्बा डण्डा काट कर उसकी पार्श्व शाखाओं में एक को छोड़ कर सभी को हटा दिया जाता है (चित्र 2)। जो एक शाखा रखी जाती है वह पतले छोर से लगभग 60-90 सेमी० नीचे छोड़ी जाती है। इस खूँटीनुमा शाखा को लगभग 15-20 सेमी० लम्बा ही रखा जाता है। बाँस के पतले छोर को तिरछा काट कर पैना कर दिया जाता है। इसे घास और चारे के बण्डल में घुसेड़ कर घास का बण्डल सर पर रख कर लाने के काम में लाते हैं।

हेरणा : यह बिल्कुल खूंटियाँ जैसा होता है परन्तु खूँटिये की पार्श्व शाखा के स्थान पर बाँस में छेद कर के अँगूठे की मोटाई के बराबर लगभग 15-20 सेमी० की बाँस की लकड़ी उसमें आर-पार फँसाई जाती है। यह भी खूंटियाँ की तरह उपयोग में लाई जाता है (चित्र 3) ।

हेडन : बाँस को फाड़ कर घरों की छत पर आर-पार लगाई जाने वाली रचना हेडन कहलाती है। हेडन पर केलू रखे जाते हैं।



4

चित्र 4. बाँस से निर्मित चारपाई।

माचा/ खाटला : अन्य क्षेत्रों में चारपाई की बुनाई रस्सी या निवार से की जाती है परन्तु भील हरे बाँस की पतली फाड़ उतार कर उन्हें निवार कर तरह उपयोग कर चारपाई (माचा, खाटल) बुनते हैं। बाँस की निवार से बुनी चारपाई 'कामडा वाला खाटला' कहलाती है। उठने-बैठने पर यह चारपाई चूँ-चूँ की आवाज करती है (चित्र 4)।

निसाणी : घर की छत, डागले आदि पर चढ़ने-उतरने हेतु दो समानान्तर ऊर्ध्व लम्बे बाँसों पर थोड़े-थोड़े अन्तराल पर क्षैतिज डण्डे बेलों या प्राकृतिक रेशों द्वारा बाँधे जाते हैं। आजकल क्षैतिज डण्डों में कीलें ठोकी जाती हैं।

खाटली : श्मशान में शव को ले जाने हेतु बाँस से बनाई चारपाई खाटली कहलाती है।

नला : बाँस के खोखले लम्बे पर्वों (Internodes) को इस तरह काटा जाता है कि एक तरफ गाँठ (node) रहने से बाँस पाइप का पैंदा बंद रहे तथा ऊपर से खुला रहे। इस रचना को नला कहते हैं। इसमें बीज एवं पैसे रखे जाते हैं। चूहों को दूर रखने के लिये नले के खुले मुँह पर मक्की के दानेरहित भुट्टा (टीडुआ, टूंडी) का डाट के रूप में उपयोग किया जाता है। नला किसी टाटी आदि में खोंस कर पत्र संग्राहक के रूप में भी काम लिया जाता है।

महूडी निकालने का नला : बाँस का बनाया गया लगभग मीटर-सवा मीटर लम्बा खोखला पाइप महुआ फूल के फर्मेंट से स्थानीय महुडी नामक शराब निकालने के काम आता है।

पूंगली : यह बाँस की खोखली नली होती है जो चूल्हे में फूँक देने के काम आती है। पूंगली बेलन के रूप में रोटी बेलने के काम भी आती है।

तमणिया : यह बाँस का बना पंखा होता है जो गर्मी में हवा झलने के काम में आता है। बाँस की करीब डेढ़ फुट लम्बी गोल डण्डी के ऊपरी आधे हिस्से को फाड़ कर उसमें बाँस की लगभग 9″×9″ आकार की चटाई फँसा कर रेशों से कस कर बाँध दी जाती है।

कडया : ये अलग-अलग आकार की ढक्कनदार टोकरियाँ होती हैं। ये टोकरी दो पाटों के रूप में होती हैं। दोनों पाटें समान या असमान आकार की होती हैं। ऊपरी पाट ज्यादा चौड़ी होती है ताकि नीचे वाली के ऊपर ढक्कन की तरह काम आ सके। इनमें खाने की सामग्री, शंख, झालर एवं पूजा का सामान रखा जाता है। सपेरे ऐसी टोकरियों में साँप रखते हैं।

हत्था : धारिया, कुल्हाड़े , तब्बल, फरसे, दांतरा, भाले, फावड़े , गैंती आदि में बाँस का डण्डा हत्थे के रूप में खूब प्रयोग किया जाता है।

कछारा : बाँस की पतली-पतली फाड़ (Splits) की बनी झाड़ू (कछार) घर की सफाई और मवेशी के ठानों की सफाई में काम में आती है।

खूंटी : बाँस के एक ओर पैने किये टुकड़े खूँटी के रूप में दीवार में लगा कर सामान लटकाया जाता है। मवेशी बाँधने हेतु खूँटे के रूप में इन्हें जमीन में गाड़ा जाता है।

पैडा : घर बनाने के लिये ऊँची दीवार बनाने हेतु बाँस का एक प्लेटफार्म बनाया जाता है जिस पर मिस्त्री बैठ कर चुनाई का कार्य करता है। इसे पैडा कहते हैं।

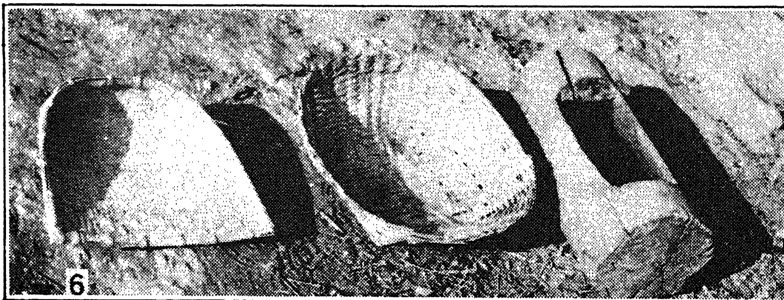
पंजरा (हिला) : यह बाँस की बनी बेलनाकार रचना होती है जिसका, पेंदा बंद होता है तथा मुँह पर ढक्कन होता है। कहीं पर मुँह वाला भाग कुछ सँकरा भी रखा जाता है। इसे घर में छत से क्षैतिज लटकाया जाता है। इसमें रात्रि में मुर्गे बिठाये जाते हैं ताकि बिल्लियों से उनकी रक्षा हो सके। कई बार बेलनाकार पँजरा न बना कर बाँस की छोटी चटाई के कोरों पर फन्देदार डोर बाँध कर रखे जाते



चित्र 5. मुर्गे बन्द करने का 'हिला' घर के सामने दो लकड़ियों पर लगाया गया है। बिल्ली को दूर रखने इसके चारों तरफ काँटे भी लगाये गये हैं।

हैं। इन चटाइयों पर मुर्गों को बिठा कर फन्दे उनके पैरों में डाल दिये जाते हैं। इन चटाईयों को घर की छत में क्षैतिज लटका दिया जाता है (चित्र 5)।

टोपला (टोकरा व टोकरी) : हरे बाँस की फाड़ों से बनाई उथले अर्द्ध गोले जैसी रचना दोपला कहलाती हैं। टोपले की अनेक उप-किस्में अलग-अलग नाम से बनाई जाती हैं तथा अलग-अलग काम में ली जाती हैं। नाथद्वारा के मन्दिर में पूजा-अर्चना में ही दर्जनों किस्मों के टोपले काम में आते हैं (चित्र 6)।



चित्र 6. बांस की फडान से निर्मित टोकरी तथा हूपड़ा। पास में मुर्गों व बकरी के बच्चों को पानी पिलाने का गोदल (लेनिया कोरोमैण्डेलिका) वृक्ष की लकड़ी से बना बर्तन रखा है।

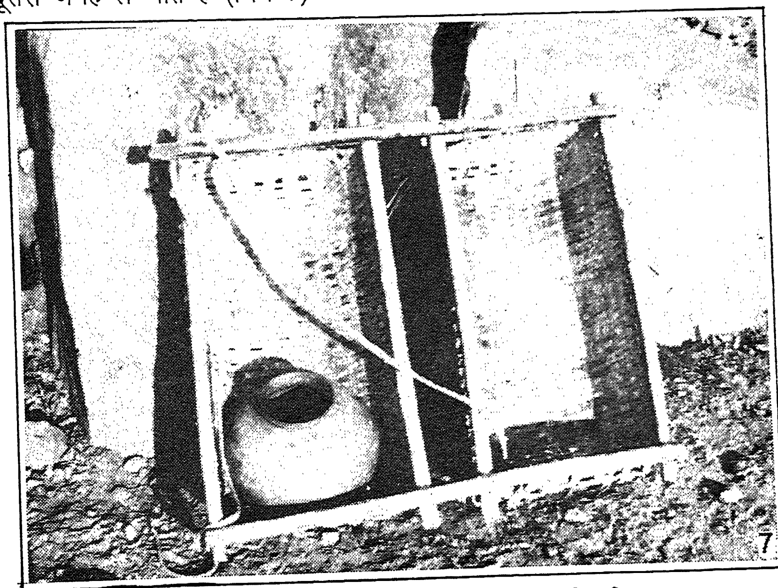
डाला : यह बहुत ही बड़ी साइज का टोपला है जिसका पेंदा कुछ चौकोर तथा ऊपरी हिस्सा गोलाकार होता है। यह गोबर के कण्डे तथा भूसा परिवहन करने के काम आता है।

हूपडा (छाज) : बाँस की फड़ान से बनाई चौकोर रचना होती है जिसमें तीन ओर ऊर्ध्व दीवार होती है तथा चौथी ओर दीवार नहीं होती (चित्र 6)। इससे खलिहान में अनाज से भूसा अलग किया जाता है। पूर्वी राजस्थान में इसे 'बरसाना' कहा जाता है। घरों में इससे आटा पिसवाने से पहले अनाज साफ किया जाता है।

ओडी : बच्चों को झुलाने का पलना फड़ान वाले बाँस से बनाया जाता है जिसे ओड़ी कहते हैं।

डंचकी : बाँस की गोलाकार रचना बना कर उस पर सागवान, जोगनबेल, बाल्या बोदलिया, लाम्बाण आदि के बड़े पत्तों को ढक कर छाता बनाया जाता है जिसे स्थानी भाषा में डांचकी कहते हैं। इसको वर्षा मे छाते की तरह काम में लाया जाता है।

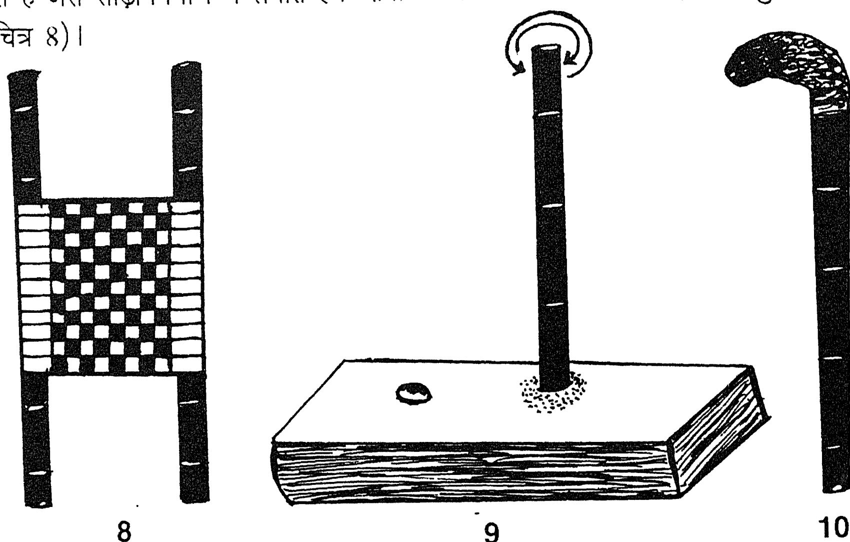
लग्गड़ : यह गधे की पीठ पर रखने की बाँस की फड़ान से बनाई अँगरेजी के शब्द "w" के आकार की काठी जैसी रचना है जो गधे की पीठ के दोनों तरफ झूलती सी रहती है। इस झूलन में मटके रख कर पेयजल का परिवहन किया जाता है तथा कुम्हार बेचने के लिये इससे मटके भी एक जगह से दूसरी जगह ले जाते हैं (चित्र 7)



चित्र 7. गधे की पीठ पर रखकर मटके परिवहन करने की लग्गड।

डाबका : यह मिट्टी पत्थर और खाद परिवहन के काम आता है। खासकर भवन बनाने हेतु गीली लोचदार मिट्टी परिवहन की जाती है। डाबका बनाने हेतु दो समानान्तर मजबूत लगभग 1.5 मी० लम्बे बाँसों के बीच लगभग 0.45 मी० लम्बे डण्डे लगभग 0.50 मी० के अन्तराल पर उसी तरह

लगाते हैं जेसे सीढ़ी-निर्माण में लगाते हैं। दोनों डण्डों के बीच बाँस की फड़ान से बुनाई कर दी जाती है (चित्र ८)।



चित्र 8. गीली मिट्टी परिवहन करने का डाबका। चित्र 9. आग उत्पन्न करने का यन्त्र
चित्र 10. वृद्धों के सहारे की लकड़ी-करेला।

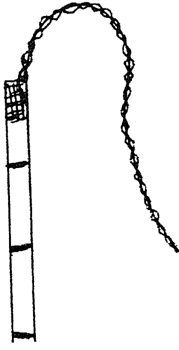
आग पाड़ने हेतु (Fire Drill) : आग पैदा करने हेतु एक बाँस में गड्ढ़ा बना कर दूसरे बाँस को नुकीला कर गड्ढे में रख दोनों हाथों। की हथेलियों से घुमाते हैं। घर्षण से गड्ढे में आग उत्पन्न हो जाती है। वैसे सबसे अच्छी फायर ड्रिल अरनी (*Clerodendron Phlamoidis*) नामक पौधे की लकड़ी से बनाते हैं। नीचे वाली लकड़ी भूमि पर लुढ़के नहीं अतः उसे छील कर चपटा भी कर देते हैं (चित्र 9)।

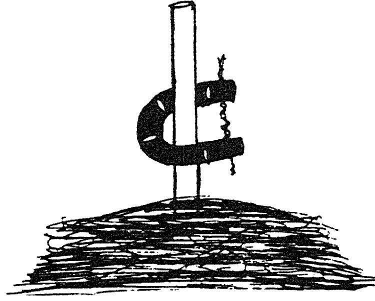
कृषि कार्यों में उपयोग

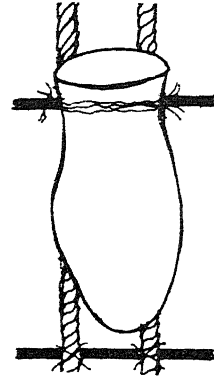
करेला : खलिहान में गेहूँ-जौ को बैलों के खुरों के नीचे कुचल कर दाने अलग किये जाते हैं। कुचलने के दौरान भूसे को उथल-पुथल करने के लिये आँकड़ेदार बाँस काम में लाया जाता है जिसे करेला कहते हैं। करेला बाँस के भूमिगत राइजोम को जड़ सहित खोद कर बनाया जाता है। करेला 150 से 180 सेमी० लम्बा होता है।

गेडी : यह करेला से छोटी लगभग 100-130 सेमी० आकार की होती है जो वृद्धों द्वारा चलने में सहारे हेतु बेंत की तरह उपयोग में लाई जाती है (चित्र 10)।

पराणी : बैलों को हाँकने का लगभग 1 मीटर लम्बा पतला डण्डा "पराणी" कहलाता है। राजस्थान के कई भागों में इसके एक छोर पर छेद कर इसमें लगभग 1 मी० लम्बी सूत की मोटी डोरी या चमड़े की पतली पट्टी बाँध कर रखी जाती है। (चित्र 11)


11


12


13

चित्र 11. बैल हाँकने की पराणी। चित्र 12. खलिहान में लगा घोड़े की नालनुमा मेरवा। चित्र 13. करमला के सहारे मिट्टी का बर्तन रस्से से बनी रहट की माल से बाँधा जाता है।

मेरवा : यह अँग्रेजी के "U" आकार जैसा होता है जिसमें दोनों भुजाओं की लम्बाई लगभग 30 सेमी० होती है। मेरवा की दोनों भुजाओं के छोर को बाँधने हेतु एक डोरी काम में लाई जाती है। खलिहान के केन्द्र में गाड़े डण्डे में मेरवा को हँसली की तरह पहना दिया जाता है। मेरवा की डोरी से बैलों की रस्सी बाँधी जाती है। इससे बैल खलिहान की सीमा में रहते हुए गोल-गोल घूमते रहते हैं। मेरवा पत्थरों में उगने वाले बाँसों के झुरमुटों में मिलता है। पत्थरों से दबने पर युवा बाँस मुड़-तुड़ कर इधर-उधर से बाहर निकलते हैं। इस प्रयास में उत्पन्न हुई वक्रता उन्हें मेरवा बनने की विशिष्टता प्रदान करती है। वैसे 'अमेती ' नामक बेल (*Hiptage benghalensis*, Family-Malpighiaceae) भी बहुतायत से मेरवा बनाने के काम आती है (चित्र 12)।

हुंडा : बैलों के मुँह पर बाँधने का छींका (हुंडा) हरे बाँस की फाड़ों से बनाया जाता है। कृषि-कार्यों के दौरान हुण्डा बैलों के मुँह पर लगा देते हैं ताकि वे पकी फसल को न चर सकें।

ढींगचा/ डांगचा : यह बांस के बनाया गोलाकार बहुत बड़ा छाता होता है। बाँस की गोलाकार रचना पर खाखरे, सागवान आदि के बड़े आकार के पत्ते ढक कर ढींगचा बनाया जाता है। ढींगचा रहँट (Persian Wheel) की मुख्य धुरी पर वर्षा में रखा जाता है ताकि लकड़ी सड़े नहीं।

करमला : रहँट की रस्से की बनी माल में मिट्टी के लम्बवत् आकार के घड़े बाँध कर पानी निकाला जाता है। मिट्टी के बर्तनों को बाँस की डण्डियों से सहारा देकर, जिसे करमला कहते हैं, बाँस की फाड़ से ही बाँधा जाता है। (चित्र 13)

पूली बाँधना : गेहूँ-जौ की फसल की कटाई के समय पूले बाँस की फड़ान से ही बाँधे जाते हैं।

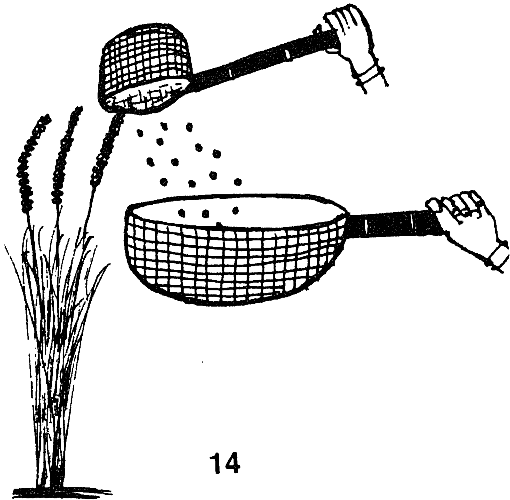
पोहरा : ये बाँस के बने अनाज-संग्राहक होते हैं जो बाँस की फड़ान के बनाये जाते हैं। ये बेलनाकार रचनाएँ होती हैं जिन पर प्रायः अन्दर-बाहर गोबर-मिट्टी का गारा लीप दिया जाता है। अनाज निकालने लिये नीचे की ओर एक छेद भी रखा जाता है।

रतालू की बेल चढ़ाने का डण्डा : खरीफ की फसल में कंदीय फसल रतालू की बेलों को चढ़ाने हेतु बाँस या सागवान के लम्बे-लम्बे (2.0-4.0 मी०) डण्डे खेतों में गाड़े जाते हैं।

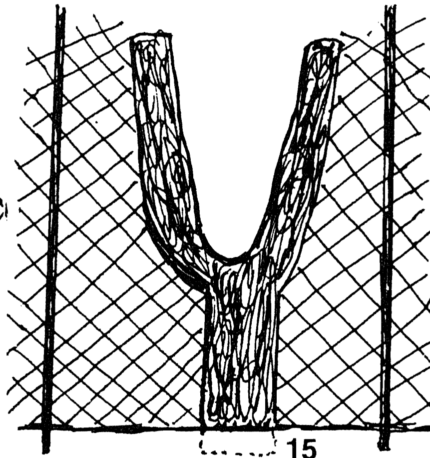
बोयला : अकाल के समय "अकाल अन्न" (Famine food grains) सामा (*Echinocloa colonum*) नामक घास से इकट्ठा करने के लिये बाँस के डण्डों में लगी दो बाँस की टोकरियों का उपयोग किया जाता है इन्हें बोयला कहा जाता है। (चित्र 14)

बाड़िया या कूंपड़ा : बाँसों को फाड़ कर तिरछा गाड़ कर चटाईनुमा फेंसिंग को बाड़िया या कूँपड़ा कहा जाता है। बाड़ी बोने के लिये चराई से सुरक्षा हेतु यह बनाई जाती है। आने जाने के लिये दो खड़े लकड़ी के खम्भे पास-पास गाड़े जाते हैं या "Y" आकार का एक दुफंका भूमि में गाड़ दिया जाता है। (चित्र 15)

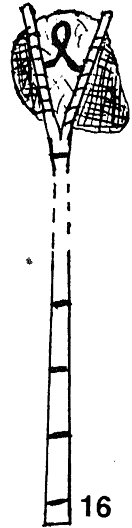
पेरणी : लम्बे बांस के ऊपरी छोर को फाड़ कर एक स्प्रिंग से फड़ान को दूर-दूर रखा जाता है।



चित्र 14. वन्य अन्न संग्रह करने का बोयला।



चित्र 15. बाँस की बाडिया



चित्र 16. पेरणी : ऊँचे वृक्षों से फल तोड़ने का यन्त्र।

फड़ान पर एक कपड़ा या जाली बाँधी जाती है। इससे ऊँचे लगे फल तोड़े जाते हैं। फल जाली में संग्रह होते रहते हैं। कई बार लम्बे बाँस में के तार का आँकड़ा ही लगाया जाता है। यह भी फल तोड़ेने के काम आता है (चित्र 16)।

तोते भगाने का तिकोन : रबी फसल में गेहूँ-जौ की बालियों को काट कर ले जाने से रोकने के लिये तोतों को बाँस की फड़ान से बनाये तिकोन से डराया जाता है यह तिकोन चटाईनुमा होता है जिसकी एक सतह गेरू से लाल रंग दी जाती है। इस तिकोन को एक डोरी के सहारे खेत में बाँस गाड़कर उससे लटका दिया जाता है। खेत में स्थान-स्थान पर ऐसे कई तिकोन लटकाये जाते हैं। हवा

में हिलने पर रंगीन एवं रंगहीन सतह अपने रंग-प्रभाव से तोतों को डराने में प्रभावी पाई गई है (चित्र 17)।

वाद्य यंत्रों में

1. पावा : ये बाँस के बने अलगोजे होते हैं जो हमेशा जोड़े में मुँह से बजाये जाते हैं।

2. वहांली : यह बांस की बनी बाँसुरी होती है जो अकेली बजाई जाती है।

3. माली : यह ढोलक में चमड़े के पार्चमेंट के साथ लगाया जाता है।

4. खेवली : स्थानीय वाद्ययंत्र ढाक तथा ढोलक बजाने का डण्डा खेवली कहलाता है।

5. तंदूरा : यह सारंगी जैसा छोटा वाद्य यंत्र है जो बाँस से बनाया जाता है।

6. बांस के अन्य वाद्य यन्त्र : जोशी ने आदिवासियों के वाद्य यन्त्रों का अच्छा विवरण दिया है। जोशी द्वारा वर्णित जिन वाद्य यन्त्रों में बाँस का प्रयोग दर्ज किया गया है वे निम्न हैं :-

1. टापरा 2. पावरी 3. शिकारा 4.सांग 5. शंख 6. गौरिया 7. ढाक 8. कावड 9. तारपी 10. पूँगी 11. गांगली

उपर्युक्त में शंख काफी दिलचस्प वाद्य है जो बाँस के डण्डे से बनाया जाता है जिसकी शक्ल कुछ-कुछ वांहली (बांसुरी) जैसी होती है। यह देवरों में असली शंख की जगह काम में लेकर शंखनाद करने के काम आता है।

सांस्कृतिक-धार्मिक कार्य में

1. गरबे का डण्डा : बाँस की लगभग 30-40 सेमी० लम्बी गोल डण्डियाँ गरबा नृत्य हेतु काम में लाई जाती हैं।

2. गेर खेलने का डण्डा : गेर नृत्य होली के दिन से दशम तक चलता है। इसमें नृत्य हेतु प्रयुक्त डण्डे की लम्बाई लगभग 150-180 सेमी० होती है।

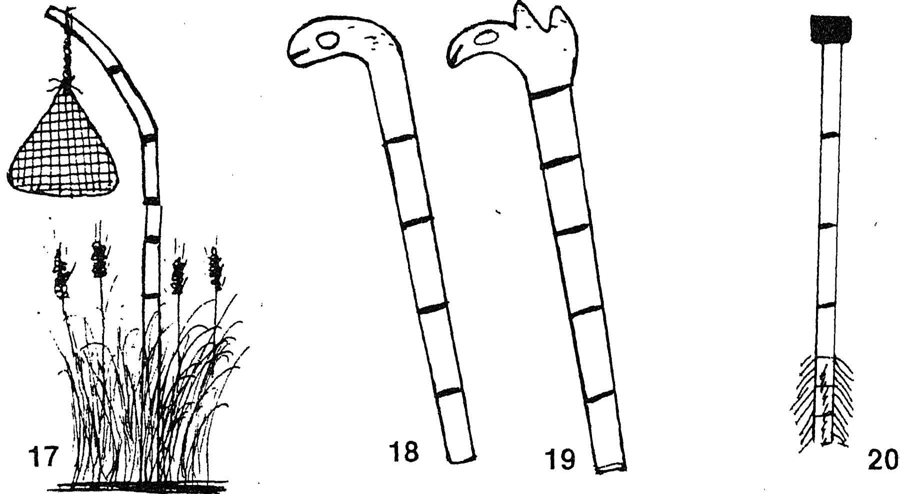
3. गेडा: यह करेला तथा गेडी से मिलती -जुलती रचना है तथा मकर संक्रान्ति पर गेंद खेलने हेतु हॉकी स्टिक की तरह काम में लाई जाती है। इसकी लम्बाई गेडी से ज्यादा व करेले से कम होती है।

4. गोटा : हनुमानजी की गदा बाँस से बनाई जाती है जिसे गोटा (घोटा) कहते हैं।

5. ढाल : गवरी का नृत्य रक्षाबन्धन के दूसरे दिन से प्रारम्भ होकर सवा माह तक चलता है। गवरी का नृत्य करने हेतु बाँस की फाड़ों (Splits) से ढाल बनाई जाती है।

6. गेरिया : बाँस की लकड़ी पर हरसिंगार की गीली छाल लपेट कर लकड़ी को आग में तपाया जाता है फिर छाल हटा ली जाती है। इससे जेबरा लाइनें लकड़ी पर उभर जाती हैं। इसे ही गोरिया कहा जाता है। यह गवरी नृत्य में काम आता है।

7. गवरी की गेडी : यह साधारण गेडी को सजाकर तैयार की जाती है। साधारण गेडी पर मुडे हत्थे पर सिन्दूर से मुँह बनाया जाता है तथा दो काले बीज मोम से चिपका कर आँखें बनाई जाती हैं (चित्र18) इस तरह यह सांप का सांकेतिक रूप बन जाता है। गवरी नृत्य में दोनों पैरों के बीच रखकर नृत्यकार इस सांप की सवारी करने का अभिनय करता है।



चित्र 17. गेहूँ की फसल में तोतों के प्रकोप को कम करने हेतु बाँस तिकोन से डरावक यन्त्र।
चित्र 18. गवरी की गेडी जो 'सांप' का प्रतीक है।
चित्र 19. गवरी का हिंगडिया जो 'हिरणी' का प्रतीक है। चित्र 20. पक्षी मारने का तीर-फेरना।

8. हिंगडिया : बाँस की गेडी पर आमतौर पर एक राइजोम जुड़ा हुआ रखा जाता है। परन्तु यदि तीन राइजोम इस तरह काट-छाँट कर रखे जावें कि एक मुँह तथा दो कानों के संकेत दें तो हिंगडिया तैयार हो जाता है। मुँह वाले भाग पर चिरमी (*Abrus Precatorius*) के दो बीज पार्श्व में चिपका कर आँख तथा एक बीज सामने चिपका कर मुँह बनाया जाता है। यही हिंगाडिया यानी 'हिरनी' है जिसे गवरी नृत्य में नृत्यकार टांगों के बीच रखकर सवारी का अभिनय करता है। (चित्र 19)

आत्म रक्षा एवं शिकार में

1. लट्ठ : लगभग १.७५-२.०० मी० लम्बी लकड़ी आत्मरक्षा का आम हथियार है।

2. धनुष-कामटी : बाँस की आधी फाड़ जो लचकदार होती है, से धनुष-कामटी बनाई जाती है। झीलों का यह विशिष्ट मुख्य हथियार है। इसे मजबूत तथा लचकदार बनाने के लिये स्थानीय उपलब्ध

"कूकड़िया" (*Eulophia Ochreata*) नामक आर्किड के भूमिगत 'राइजोमों' को पीस उसका पेस्ट मला जाता है।

3. फेरना (फेना) : एक विशेष प्रकार का तीर फेरना कहा जाता है जिससे पक्षियों का शिकार किया जाता है। साधारण तीर के शीर्ष पर बाँस का शिकार किया जाता है। साधारण तीर के शीर्ष पर बांस का लगभग 3-4 सेमी० लम्बा गुटका लगा कर फेरना बनाया जाता है। गुटका लगाने से तीर आगे से भौंड़ा हो जाता है। ऐसा तीर पक्षी को मार जरूर देता है किन्तु मांस में कोई छेद या पक्षी के टुकड़े नहीं करता है। (चित्र 20)

4. केरिया : यह बांस की फड़ान से बनाई चटाईनुमा रचना है। नदी-नालों के पानी को रोक कर उसे केरिया पर एक पतली धारा के रूप में गुज़ारा जाता है। केरिया पर मछली गुजरते समय पकड़ ली जाती है।

5. पोहरी/ पंजरा : यह एक बेलनाकार रचना होती है जो बाँस की बनी होती है, जिसके मुँह पर बाँस का बना कीप लगा रहता है। नदी-नालों की पतली धार कीप में गिराने पर मछलियाँ अन्दर गिर कर संग्रहित होती रहती हैं तथा पानी छेदों से बाहर निकलता रहता है।

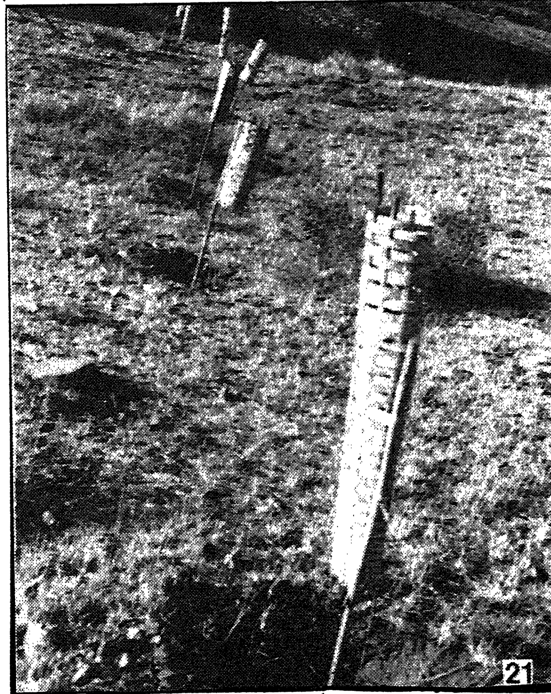
5. कडिया : यह बाँस की बनी एक विशेष घातक लकड़ी होती है जिसके अगले छोर पर लोहे के कई मोटे छल्ले लगाये जाते हैं ताकि इसकी मारक-क्षमता बढ़ जाये।

कुटीर उद्योगों में

1. चन्द्रिका : रेशम के कीड़े पालने में इन विशेष टोकरियों का उपयोग किया जाता है। चन्द्रिका कई संकेन्द्रित उथले कोरों की टोकरियों का संस्करण है।

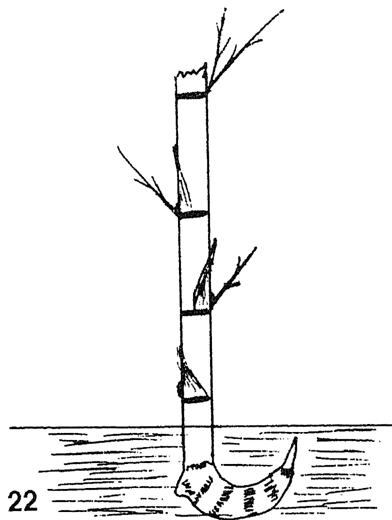
एथनो-फोरेस्ट्री में उपयोग

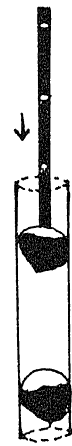
1. करवला : यह बाँस की फड़ान से बना बेलनाकार ट्री-गार्ड होता है। कई बार ट्री-गार्डों को एक या अधिक बाँसों के डण्डों के सहारे खड़ा किया जाता है। बाँसो के डण्डों की लम्बाई बढ़ा कर बढ़ते पौधों को चराई से बचाया जाता है। प्रायः आम तथा महुवा के छोटे पौधों की सुरक्षा हेतु इसका उपयोग किया जाता है (चित्र 21)



चित्र 21. करवला : बाँस से बने ट्री-गार्ड।

2. बाँस का रोपण : वर्षा ऋतु में नव क्षेत्र से हरा बाँस राइजोम सहित खोद कर लाया जाता है। राइजोम पर लगभग 2.0 मी० लम्बा बांस रख कर शेष काट दिया जाता है। यह ठूँठ खेतों की मेड़, पाली पर या नालों के किनारे लगाया जाता है। यदि पूरा बाँस लगाया जाये तो यह हवा से हिल-डुल कर नई जड़ों को नुकसान पहुँचा सकता है अतः ठूँठ ही रोपा जाता है (चित्र 22)





चित्र 22. बाँस का रोपण।
चित्र 23. गोली दागने का खिलौना-फटूकड़ी।

खिलौनों में उपयोग

1. फटूकड़ी (दम्बुक) : जोशी[1] ने बच्चों की इस खिलौना-बन्दूक का विवरण दिया है जो बाँस से बनी होती है। लेकिन एक दूसरे तरह की फटूकड़ी भी बच्चे बनाते हैं। इसे बनाने के लिये बाँस की पोली नली में माल (Celastrus Paniculata) का फल इस तरह अन्दर धँसाते हैं कि नुकीला सिरा आगे रहे। इस फल को दूसरे खुले भाग की ओर व्यवस्थित कर पिछले सिरे से पुनः एक नया फल बाँस की पतली डंडी से आगे की ओर खिसकाते हैं। जैसे ही दोनों फलों के बीच की हवा सम्पीड़ित होती है, अगला फल फटाक की आवाज के साथ गोली की भाँति निकल छूटता है। यदि माल का फल न मिले तो पुवाड (Cassia tora) की पत्तियों से गोली बनाकर खिलौना-बन्दूक चलाई जाती है। (चित्र 23)

2. पिचकारी : एक मोटा पोला बाँस का टुकड़ा इस तरह काटा जाता है कि उसमें एक गाँठ (Node) का पर्दा (Septum) भी आ जाये। इस पर्दे में बारीक छेद गर्म सुये से किया जाता है। एक पतली बाँस की डण्डी ले कर इसके एक सिरे पर पुराने कपड़े कस कर लपेट कर एक गाँठ के रूप में बाँधे जाते हैं। इसे पोले बाँस के पिछले खुले सिरे के हिस्से से अन्दर घुसड़ा जाता है। यह पिचकारी होली खेलने के काम आती है।

चारे में उपयोग

बाँस के पत्ते पशुओं के लिये बहुत ही अच्छे चारे के रूप में काम में लायें जाते हैं। वर्षा के बाद जब मौसमी घास सूख जाती है, वन क्षेत्रों में उगे बाँस के हरे पत्ते तोड़े जाते हैं तथा उनके

बण्डल हेरणा व खूँटिआ की मदद से निकाल लिये जाते हैं।

भोजन में उपयोग

गोभा : मानसून काल में नए बाँस-कल्ले का फुटान भूमिगत राइजोमों से होता है, इन्हें गोभा कहा जाता है। गोभा की छोटी-छोटी कतली काट कर हरी सब्जी बनाई जाती है तथा अचार डाला जाता है।

बीज : पुराने समय में अकाल के समय बीजों को खाने के काम लाया जाता था।

दवाओं में उपयोग (Ethno-Medicology)

1. छाल को पत्थर पर पीस कर पाउडर बनाया जाता है, जिसे घाव पर लगाया जाता है। तने पर जमा सफेद पदार्थ को भी घाव पर लगाया जाता है।

2. वंश लोचन (बाँस का गोद) पुष्टिकारक रसायन माना गया है। यह दवा आयुर्वेद में स्थापित रसायन है।

3. मवेशी या मनुष्य की हड्डी टूटने पर बाँस की खपचियों को टूटे स्थल के चारों ओर बाँध कर हड्डियों को जोड़ने का कार्य किया जाता है।

पशु पालन में उपयोग

कड़िया : बकरियों का बाडा बाँस से बनाया जाता है जिसे कडिया कहते हैं।

नाल : यह बाँस की खोखली नहीं होती है। जिसमें आवश्यकता पड़ने पर दवा भर कर पशुओं को पिलाई जाती है।

विवाह में उपयोग

1. माडा : यह शादी का मण्डप होता है जो हरे बाँस से बनाया जाता है।

2. तोरण : लम्बे हरे बांस को शादी के अवसर पर आर्च-नुमा ढंग से लगा दिया जाता है जिसे तोरण कहते हैं।

3. हेलडा : शादी में वर पक्ष की तरफ से बरात प्रस्थान के समय एक लम्बा हरा बांस ले जाया जाता है जिसे हेलडा कहा जाता है। ऐसा ही हेलडा कन्या पक्ष की तरफ से कन्या के घर तैयार रखा जाता है। बारात आने पर दोनों हेलडों को बाँध कर तोरण के रूप में लगाया जाता है। यह वर-वधू के भविष्य में प्रेम व आपसी स्नेह बन्धन को निरूपति करता है। हेलडा जैसी प्रथा उदयपुर के राजघराने में भी प्रचलन में थी ए नु वहाँ बाँस के बजाय खजूर की सूखी पत्ती का चलन था

4. सोगा (मोड) : बाँस की खपचियों से बना छोटा त्रिकोन सोगा कहलाता है जिसे दूल्हे के साफे (पगड़ी) में बाँधा जाता है।

बाँस के उपयोग से सम्बन्धित तथ्य अपने आप बोलते हैं कि यह भीलों व अन्य आदिवासियों के जीवन में कितनी उपयोगी वनस्पति है। उदयपुर जिले में वन संरक्षण हेतु स्थानीय जनता के सहयोग से बनाई सालूखेडा, मालपुर, नाल साण्डोल, ढाला, दौलरिया, नाल ननामा, दमाणा तालाब, खरडिया, पाटिया, नला, आमलिया, लूकड़ा, ओडा, कांकरमाला, जाडा पापला आदि गाँवों की वन सुरक्षा एवं प्रबंध समितियों के सदस्यों की मदद से किये गये सर्वेक्षण से भी यह तथ्य सामने आया कि बाँस स्थानीय पौधों में सर्वाधिक महत्वपूर्ण स्थान रखता है। अतः वनों में घट रही इसकी उपलब्धता को रोकने के लिये वन विभाग अरावली वृक्षारोपण परियोजना सहित अन्य योजनाओं में बड़े पैमाने पर बाँस लगा रहा है। वन विभाग ने बांस को कम समय में वनों में पनपाने हेतु बीज से राइजोम तैयार कर फिर राइजोम से तैयार पौधों का रोपण प्रारम्भ किया है।

चूँकि बाँस बहु-उपयोगी वनस्पति है अतः इसे अतिदोहन का शिकार होना पड़ा। स्थिति यहाँ तक पहुँच गई कि एक बहुत बड़े भू-भाग से बाँस लगभग समाप्त हो गया। आदिवासियों द्वारा अवैज्ञानिक तरीकों से थूरों में चोरी से कटान करने, भू-क्षरण द्वारा राइजोमों के जमीन से बाहर निकल आने, अति चराई, पशुओं के खुरों द्वारा कुचले जाने, आग, सूखा तथा प्राकृतिक पुनरुद्भावन के रुक जाने से बाँस का विनाश हुआ है। सामूहिक पुष्पन (Gregarious flowering) भी अरावली बांसों के लिये खतरा सिद्ध होने जा रहा है। वर्ष 1995 में माउण्ट आबू के कुछ क्षेत्रों में सामूहिक पुष्पन हुआ। सामूहिक पुष्पन के बाद बांस मर जाता है। पहले इतनी अनुकूल परिस्थितियाँ रहती थीं कि पुष्पन से बने बीज प्राकृतिक पुनरुद्भवन कर पुनः बाँस को स्थापित कर देते थे परन्तु अब वनों से काफी मिट्टी बह चुकी है, भूमि में नमी का ठहराव पर्याप्त नहीं है, अति-चारण एवं रौंदने के फलस्वरूप बाँस पुनरुद्भवन की सम्भावना बहुत कम है। अतः बाँस को पुनः लाने के लिये वृक्षारोपण एवं प्रभावी सुरक्षा का ही विकल्प बचता है।

प्राकृतिक बाँस तथा रोपित बाँस के थूरों पर बाँस कल्चर द्वारा मिट्टी चढ़ाकर, चराई को नियंत्रित करके, मृदा एवं जल संरक्षण उपाय करके बाँस के विनाश को रोका जा सकता है। दक्षिणी राजस्थान में भील लोग बच्चे न होने की स्थिति में 'मगरा बावसी' यानी वन एवं पहाड़ों के देवता से बच्चे की मनौती माँगते हैं तथा बच्चा हो जाने पर 'चूनरी ओढ़ाने' का वायदा करते हैं। यह चूनरी और कुछ नहीं, गरमी में जंगल में आग लगाने की प्रथा है। ऐसी प्रथाओं पर जन-चेतना लाकर सामाजिक एवं सरकारी स्तर पर रोक जरूरी है। इससे आग से नष्ट होने वाले अन्य वृक्ष एवं वन्य प्राणी भी बच सकेंगे।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक उन आदिवासी बुजुर्गों का बुहत आभारी है, जिन्होंने सर्वे में मदद की। प्रेरणा एवं सहयोग हेतु मैं डॉ० प्रभाकर जोशी, श्री ए० सी० चौबे, श्री वाई० के० दक, श्री कुमार स्वामी गुप्ता, श्री कालूलाल के प्रति भी आभार प्रकट करता हूँ।

निर्देश

1. जोशी, पी० : एथनोबोटनी आफ दी प्रिमिटिव ट्राइब इन राजस्थान, (1995)

2. शर्मा, सतीश कुमार : JBNHS, (1994), **91** (3) : 449

3. शर्मा, सतीश कुमार : **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका** : (1995), **38** (1), 13-27.

4. शर्मा, सतीश कुमार : **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका** : (1996), **39** (2), 119-132.

5. शर्मा, सतीश कुमार : **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका** : (1997), **40**(3), 141-151.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती
सस्थापक सम्पादक

डॉ० चन्द्रिका प्रसाद
प्रधान सम्पादक

डॉ० शिव गोपाल मिश्र
प्रबन्ध सम्पादक

Swami Satya Prakash Saraswati
Founder Editor

Dr. Chandrika Prasad
Chief Editor

Dr. Sheo Gopal Misra
Managing Editor

सम्पादन मण्डल

डॉ० एस० के० जोशी (भौतिकी)
भूतपूर्व महानिदेशक, सी० एस० आई० आर०
नई दिल्ली

डॉ० आर० सी० मेहरोत्रा (रसायन)
एमेरिटस प्रोफेसर, रसायन विभाग,
राजस्थान विश्वविद्यालय

डॉ० डी० डी० पंत (वानस्पतिकी)
एमेरिटस साइंटिस्ट, इलाहाबाद वि० वि०

डॉ० एस० के० जैन (वानस्पतिकी)

प्रो० आर० पी० रस्तोगी (रसायन)
एमेरिटस साइंटिसट, सी० डी० आर० आई०,
लखनऊ

प्रो० यू० एस० श्रीवास्तव (जीवविज्ञान)
अध्यक्ष, राष्ट्रीय विज्ञान अकादमी

Dr. S.K. Joshi (Physics)
Ex-Director General, C.S.I.R.
New Delhi

Dr. R.C. Mehrotra (Chemistry)
Emeritus Professor,
Rajasthan University

Dr. D.D. Pant (Botany)
Emeritus Scientist
Allahabad University

Dr. S.K. Jain (Botany)

Prof. R.P. Rastogi (Chemistry)
Emeritus Scientist, C.D.R.I.
Lucknow

Dr. U.S. Srivastava (Zoology)
President, N.A. Sciences
Allahabad

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 100 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 25 or 3£ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405

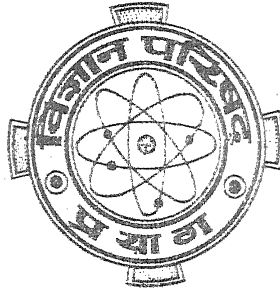
ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 41 July 1998 No. 3



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 41 July 1998 No. 3

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 3, July, 1998.

प्राचीन भारत में राजकीय सेवा और प्रशासन-व्यवस्था*

गया चरण त्रिपाठी

प्राचार्य, गंगानाथ झा केन्द्रीय संस्कृत विद्यापीठ, प्रयाग

[प्राप्त—जनवरी 8, 1998]

मानवे वाचस्पतये शुक्राय पराशराय ससुताय।
चाणक्याय च विदुषे नमोऽस्तु नयशास्त्रकर्तृभ्यः।।
—पञ्चतन्त्र

राजनीतिशास्त्र के महाभारत से लेकर मध्य युग तक के प्राचीन भारतीय विद्वानों ने राज्य (state)संज्ञक संस्था के सात अंग माने हैं। इन सात अंगों को मिलाकर ही राज्य रूपी पुरुष के सम्पूर्ण शरीर का निर्माण होता है और राज्य में सुस्थिरता तथा समृद्धि तभी आती है जब सारे सातों अंग पुष्ट हों और सुचारू रूप से परस्पर सामंजस्य बनाए रखें। ये सात अंग हैं— **स्वामी** अथवा राजा, **अमात्य** अर्थात् मन्त्रिपरिषद् एवं राजकीय अधिकारी, **राष्ट्र** अथवा जनपद अर्थात् जनता, **बल** या सेना, **कोश** अथवा वित्तीय संसाधन, **दुर्ग** अथवा उत्कृष्ट सुरक्षा-उपाय एवं **सुहृत्** अर्थात् मित्र अथवा संकट के समय सहायक अन्य राजा आदि। कामन्दकीय नीतिशास्त्र का वचन है-

स्वाम्यमात्यश्च राष्ट्रं च दुर्गं कोशो बलं सुहृत्।
परस्परोपकारीदं सप्ताङ्गं राज्यमुच्यते।।

इन सभी अंगों के अभीष्टस्वरूप एवं वैशिष्ट्य का विस्तार से वर्णन प्राचीन भारतीय राजनीतिशास्त्र के ग्रन्थों में प्राप्त होता है। महाभारत, कौटिल्य के अर्थशास्त्र, कामन्दकीय नीतिसार एवं शुक्रनीति आदि ग्रन्थों में सर्वप्रथम राजा की ही योग्यता को लेकर उसमें कौन से व्यक्तिगत गुण और किस प्रकार के संस्कार होने चाहिये, इसका विस्तृत विवेचन किया गया है।

---

* 27 फरवरी 1998 को पं० गंगानाथ झा स्मृति व्याख्यानमाला के अन्तर्गत दिया गया प्रथम व्याख्यान

स्वामी अथवा राजा की योग्यताएँ

हर व्यक्ति राजा होने योग्य नहीं होता। एक युवराज को उसके पिता द्वारा बड़े प्रयत्नपूर्वक राजपद का गुरुतम कार्य भार सँभालने के लिये तैयार किया जाता है। कामन्दक के अनुसार एक राजा में कुलीनता, उत्तम संस्कार संपन्नता, शारीरिक एवं मानसिक परिपक्वता, शील, उदारता, शीघ्र निर्णय लेने की क्षमता, कार्यों, विचारों और निर्णयों की समरूपता, सत्यवादिता, सुख एवं दुःख में स्वभाव की एकरूपता, दूरदर्शिता, आचरण और व्यवहार की शुद्धता, उत्साह संपन्नता, विनम्रता, गम्भीरता, धार्मिकता एवं वृद्ध तथा सज्जन व्यक्तियों के प्रति आदरभाव आदि गुणों से युक्त होना चाहिये तभी राजलक्ष्मी राज्य में स्थिर रहती है अन्यथा जैसे फूटे बर्तन से पानी धीरे-धीरे बह जाता है वैसे ही वह भी चली जाती है।[1] अपने कर्मचारियों के गुण-दोषों का विचार और उनका परीक्षण करने से पूर्व राजा को सबसे पहले अपने व्यक्तित्व का ही आलोचनात्मक परीक्षण करना चाहिये—

आत्मानमेव प्रथममिच्छेद् गुणसमन्वितम्।
कुर्वीत गुणसंपन्नस्ततः शेषपरीक्षणम्।।

काम० नी० 4/3

ठीक यही मत शुक्रनीतिकार का भी है। राजा को पहले अपने अन्दर उत्तम संस्कारों एवं गुणों का आधान करके उसके बाद अपने पुत्रों में, तत्पश्चात् अपने मंत्रियों और अधिकारियों में, फिर अपने नौकरों में और सबसे बाद में अपनी प्रजा से इस प्रकार के गुणों की अपेक्षा करनी चाहिये । जो राजा केवल दूसरों को उपदेश देने में कुशल होता है, उसकी बातों का कोई प्रभाव नहीं होता अतः

''परोपदेशकुशलः केवलो न भवेन्नृपः''

[शु०नी०1/93]

काम, क्रोध, मोह, लोभ, मान तथा मद ये राजाओं के 6 शत्रु हैं। उनके वशीभूत नहीं होना चाहिये[2] और अतिशय स्त्रीप्रसंग, मृगया, द्यूत तथा मदिरापान इन चार व्यसनों से बचना चाहिये। जो राजा व्यसनी, अथवा डरपोक (भीरु), कार्य को लम्बे समय तक टालने वाला तथा प्रमादी होता है उसे प्रजा पसन्द नहीं करती।[3] राजा का मुख्य कर्तव्य है प्रजा का रंजन अर्थात् प्रजा को सुखी एवं संतुष्ट रखना—

रञ्जनात् सर्वलोकानां राजेति कवयो विदुः।

लोक-रञ्जन करने के कारण ही राजा की 'राजा' संज्ञा होती है। 'प्रजा' का अर्थ है सन्तान, और राजा को प्रजा के कल्याणार्थ उसी प्रकार सचेष्ट रहना चाहिये जैसे कोई पिता अपनी सन्तान हेतु रहता है।

कामन्दक का कथन है कि राजा को अपने सचिवों तथा अधिकारियों को चुनने में बहुत सावधानी बरतनी चाहिये । यदि राजा स्वतः अयोग्य हो तो भी योग्य और उत्तम अधिकारियों के कारण राज्य-प्रबन्ध ठीक से चलता रहता है और राजा सुखी रहता है किन्तु यदि अधिकारी अयोग्य अथवा

दुष्ट हों तो राज्यतन्त्र बहुत शीघ्र ही चरमरा जाता है और राज्य शत्रुओं के अधीन हो जाता है। दुष्ट अधिकारी पहले राज्य की जनता को खाना प्रारम्भ करते हैं और फिर धीरे-धीरे अपने आश्रयदाता राजा को ही खा जाते हैं अतः दुष्ट अधिकारियों से घिरा राजा वैसा ही है जैसा भयंकर विषधर व्यालों से घिरा कोई वृक्ष—

दुष्टोऽपि भोग्यतामेति परिवारगुणैर्नृपः।
न दुष्टपरिवारस्तु व्यालाक्रान्त इव द्रुमः।।
निरुन्धानाः सतां मार्ग भक्षयन्ति महीपतिम्।
दुष्टात्मानस्तु सचिवाः तस्मात् सुसचिवो भवेत्।।

–4/11.12

राजकर्मचारियों की योग्यताएँ

कामन्दक ने अपने नीतिसार में राज्य के सभी प्रमुख अधिकारियों की योग्यताओं का पृथक् विवेचन किया है जिनके आधार पर उनकी नियुक्ति की जानी चाहिये। किन्तु जो गुण सभी में होने चाहिये वे हैं—कुलीनता अथवा आभिजात्य, स्वभाव की मृदुता एवं दयालुता, शुचिता अर्थात् ईमानदारी एवं सबसे बड़ी बात है, लोक अथवा सामान्यजन का कल्याण करने की भावना—

प्रख्यातवंशमक्रूरं लोकसंग्राहिणं शुचिम्।
कुर्वीतात्महिताकांक्षी परिवारं महीपतिः।।

–4/10

आचार्य शुक्र ने राजकर्मचारियों की नियुक्ति में जाति एवं कुल को कोई महत्व प्रदान नहीं किया है। उनका कहना है कि कर्मचारी की कर्मठता, योग्यता, उसका शील एवं स्वभाव तथा उसके गुण, ये ही विचारणीय हैं, जाति एवं कुल नहीं। जाति एवं कुल का विचार विवाह संबन्ध एवं सहभोज में किया जाना चाहिये-

नैव जातिर्नैव कुलं केवलं लक्षयेदिह।
कर्म-शील-गुणाः पूज्यास्तथ जातिकुलेन हि।।
न जात्या न कुलेनैव श्रेष्ठत्वं प्रतिपद्यते।
विवाहे भोजने नित्यं कुलजातिविवेचनम्।।

–2/56,57

उक्त से स्पष्ट है कि पुरोहित जैसे कुछ पदों को छोड़कर प्रायः सभी जातियों में उत्पन्न लोगों की निजी योग्यतानुसार सभी पदों पर नियुक्ति हो सकती थी; जातिगत आरक्षण का विधान नहीं था।

श्रेष्ठ भृत्य के लक्षण गिनाते हुए शुक्रनीति में कहा गया है कि एक उत्तम कर्मचारी में आभिजात्य के साथ-साथ सुशीलता, मधुरभाषिता, निरालसता, कार्यकुशलता, दृढ़ता, चित्त की पवित्रता, परोपकारिता

एवं किसी को हानि न पहुँचाने की भावना होनी चाहिये। उसे मनसा, वाचा, कर्मणा अपने स्वामी के प्रति समर्पित रहना चाहिये और जितने मनोयोग से वह अपना कार्य करे उससे चौगुने उत्साह से स्वामी का कार्य संपन्न करे। उसे केवल अपने मासिक वेतन मात्र से संतुष्ट रहना चाहिये, इधर-उधर से धन कमाने की चेष्टा नहीं करनी चाहिये। साथ ही उसे राज्य एवं राजा के हित का भी ध्यान रखना चाहिए और यदि कोई उसके विभाग में स्वामी के हितों की हानि कर रहा है तो उस पर भी दृष्टि रखनी चाहिये और यथासंभव उसका प्रतीकार करना चाहिये। स्वामी के किसी भी निर्णय, या आदेश पर उसे आक्षेप या प्रतिकूल टिप्पणी नहीं करनी चाहिये और यदि स्वामी में कोई दोष या त्रुटियाँ हों भी तो भी उन्हें उसे जनसामान्य के समक्ष प्रकाशित नहीं करना चाहिये। उसे अपने ही अधिकारों से संतुष्ट रहना चाहिये और किसी भी दूसरे अधिकारी के अधिकारों को प्राप्त करने की चेष्टा नहीं करनी चाहिये। सदा प्रसन्नचित, निःस्पृह एवं संतुष्ट रहते हुए उसे अपने वेतन के अनुसार ही अपना व्यय करना चाहिये। यदि स्वामी से उसे पुरस्कारस्वरूप कोई वस्त्र-आभूषण आदि प्राप्त हुए हों, तो उन्हें उसे अपने स्वामी के समक्ष सदा धारण करना चाहिये। स्वामी का यदि कोई आदेश उसे अनुचित लगे तो उसे स्वामी के पास जाकर एकान्त में उनसे चर्चा करे और सदैव आत्मप्रशंसा से विमुख रहते हुए प्रदत्त कार्य को पूर्ण सावधानी एवं मनोयोग के साथ सम्पादित करे।[4] भृत्यों की विशेषताओं में सर्वाधिक महत्व शुक्र ने सत्यवादिता, आज्ञाकारिता और परोपकार की भावना (Public interest)को दिया है।[5]

अयोग्य और निन्दनीय सेवक वे हैं जो बारबार अपनी अक्षमता या अन्य अपराधों के लिये दण्डित किये जा चुके हों, जिन्हें बहुत कम वेतन दिया जाता हो अथवा जो प्रकृत्या दुष्ट स्वभाव के हों, कायर हों (अर्थात् लोगों के दबाब में आकर अनुचित काम कर देते हों), जिन्हें धन का लोभ हो, सामने कुछ बोलते हों पीठ पीछे कुछ और कहते हों, मद्यपानादि के व्यसनी हों, घूस लेते हों, नास्तिक एवं धर्मविमुख हों, दम्भी हों, असत्यभाषण करते हों, बात-बात में क्रुद्ध हो जाते हों, शत्रु के प्रति सद्भाव और सहानुभूति रखते हों या राजा के द्वारा कभी पूर्वकाल में तिरस्कृत होने पर उसका मालिन्य मन में बनाए हों, आदि।[6] ऐसे सेवकों से राजा को सावधान रहने का संकेत दिया गया है। भृत्यों के सर्वाधिक निन्दनीय दोषों में शुक्र ने हिंसा एवं असत्यभाषण का परिगणन किया है। ऐसे भृत्यों को तत्काल निकाल देना चाहिये।[7]

राजकर्मचारियों का त्रिविध वर्गीकरण

कौटिलीय अर्थशास्त्र एवं शुक्रनीति का परिशीलन करने से प्रतीत होता है कि प्राचीन भारत में राजकीय कर्मचारियों के मुख्यतः तीन वर्ग थे—प्रथम वर्ग में वे दस प्रमुख अधिकारी या अमात्य आते थे जिन्हें आज के भाषा-प्रयोग की दृष्टि से राज्य की अन्तरंग मन्त्रिपरिषद् या 'कैबिनेट' कहा जा सकता है। इन सबका निवास राजधानी में राजा के महल के आस-पास होता था।

दूसरे वर्ग में वे बड़े अधिकारी आते थे जिनको राजा राज्य के एक-एक विभाग सौंप कर उनका अधीक्षक बना देता था और आवश्यकतानुसार राजधानी में अथवा अन्यत्र उनकी नियुक्ति करता था। ऐसे अधिकारियों के लिये कौटिल्य ने ''अध्यक्ष'' शब्द का प्रयोग किया है। बीस विभागों के अध्यक्षों

के कर्तव्यों का विस्तार से अर्थशास्त्र के द्वितीय अधिकरण में विवेचन किया गया है। आज की प्रशासनिक व्यवस्था में विभिन्न मन्त्रालयों के सचिवों से इनकी तुलना की जा सकती है किन्तु उस समय ये अध्यक्ष पूर्ण स्वतन्त्र थे और सीधे राजा के नीचे कार्य करते थे। अध्यक्षों के नीचे भी अनेक कर्मचारी उस विभाग का कार्य सम्पादित करने के लिये नियुक्त थे।

तीसरे प्रकार के वर्ग में अन्य सभी प्रकार के वे विभिन्न राज कर्मचारी आते थे जिनकी महल अथवा नगर में अनेक और विविध प्रकार के कार्यों को संपादित करने के लिये आवश्यकता रहती है जैसे-वैतालिक (प्रातःकाल स्तुतिपाठ पूर्वक राज को जगाने वाले), बेंत या दण्ड लिये हुए सामान्य प्रतीहारी, शिल्पकला के पण्डित, 64 कलाओं में निपुण कलावन्त, भाण एवं परिहास में निपुण नट विदूषक आदि, बहुरूपिये, माली, दुर्ग आदि बनाने और उसकी मरम्मत करने में निपुण मिस्त्री, महानालिक यन्त्रों के गोलों से लक्ष्य भेदन करने वाले, अग्निचूर्ण (बारूद) एवं अग्नि-बाण आदि बनाने वाले, धनुष, तलवार, भाले, तरकस आदि अस्त्रशस्त्र का निर्माण करने वाले, सोने, चाँदी और रत्नों के द्वारा आभूषण निर्माण में दक्ष, स्वर्णकार, पत्थरों को गढ़ने वाले, पुताई रँगाई करने वाले, धातु के बर्तन बनाने वाले, कुम्हार, कहार, बढ़ई, सड़क बनाने वाले, नाई, धोबी, मेहतर, जुलाहे, मोची, नाविक (केवट), व्याध, नर्तकियाँ, वेश्याएँ, बर्तन माँजने वाले, शय्या बिछाने वाले, महल के कमरों में झाड़ू-पोछा आदि का कार्य करने वाले, सुगन्धित द्रव्य बनाने वाले, ताम्बूल (पान) बनाने वाले आदि-आदि। इन सभी अवर या निम्न कर्मचारियों की नियुक्ति राजभवन में एवम् अन्यत्र की जाती थी। ऐसे भृत्यों को 'हीनकर्मी' अथवा 'अल्पकर्मी' की संज्ञा दी गई है जिन्हें आवश्यकतानुसार सभी जगह लगाया जा सकता था।

[हीनाल्पकर्मिणश्चैते योज्याःकार्यानुरूपतः, 2/206]।

मन्त्रिपरिषद् के सदस्यों के कर्तव्य

राजा के अत्यन्त विश्वस्त, जिन दस प्रमुखतम अधिकारियों से युक्त आन्तरिक मन्त्रिपरिषद् का उल्लेख किया जा चुका है उनमें निम्न सदस्य होते हैं—राजपुरोहित, राजप्रतिनिधि, प्रधान सचिव, मन्त्री, प्राड्विवाक, पण्डित, सुमन्त्रक, अमात्य तथा दूत (शु०नी० 2/71, 72)। शुक्र उस प्राचीन मत का भी उल्लेख करते हैं जिसके अनुसार इस अन्तरंग परिषद् में पुरोहित एवं दूत को हटा कर केवल आठ ही सदस्य होने चाहिये और सभी का वेतन बराबर होना चाहिये जब कि शुक्र दस सदस्यों वाली परिषद के पक्ष में हैं और उनका विचार है कि पुरोहित से लेकर दूत तक वरिष्ठता का उलटा क्रम है (2/75-78) और प्रत्येक वरिष्ठतर व्यक्ति को अपने से कनिष्ठतर व्यक्ति की अपेक्षा दस प्रतिशत वेतन अधिक मिलना चाहिये। इस प्रकार राज पुरोहित को दूत का ठीक दुगना वेतन मिलता है। (दशमांशाधिकाः पूर्वं दूतान्ताः क्रमशः स्मृताः)। दूत शब्द यहाँ वस्तुतः राजकीय गुप्तचर सेवा (Intelligence Service)के प्रधान अधिकारी का वाची है। कुछ अन्य पदनामों के कर्तव्यों का भी थोड़ा विवेचन यहाँ अपेक्षित है।

पुरोहित को वेदों एवं शास्त्रों का ज्ञानी एवं साथ ही लौकिक धार्मिक विश्वासों का भी ज्ञाता, व्यावहारिक (Practical), जितेन्द्रिय, क्रोधविहीन, लोभादि से रहित, धनुर्वेद तथा अस्त्र-शस्त्रादि की विद्या

को जानने वाला, व्यूहरचना कौशल में दक्ष तथा नीतिनिपुण होना चाहिये। उसका गाम्भीर्य, पाण्डित्य एवं व्यक्तित्व ऐसा होना चाहिये कि जिसके क्रोध से राजा को भी भय बना रहे जिससे वह राजा को सन्मार्ग में प्रवृत्त करता रहे—

यत्कोपभीत्या राजाऽपि धर्मनीतिपरो भवेत्।

–2/80ग घ

जिस पुरोहित से राजा को कोई डर नहीं लगता, उससे कोई लाभ नहीं। वह दरबार की शोभा तो बढ़ाता है परन्तु राज्यतन्त्र के लिये पूर्णतः अनुपयोगी है। उसकी स्थिति ठीक वैसी ही है जैसी स्त्रियों के शरीर पर पड़े हुए आभूषण आदि की-

न बिभेति नृपो येभ्यस्तैः स्यात् किं राज्यवर्धनम्?
यथालंकार वस्त्राद्यैः स्त्रियो भूष्यास्तथा हि ते।।

–2/82

राजा का **प्रतिनिधि** राजा की ओर से उसके अभाव या अनुपस्थिति में शासन तन्त्र के संचालन का उत्तरदायी होता है। उसे राज्य के हित में क्या करणीय है और क्या अकरणीय, इसका उचित ज्ञान होना चाहिये। साथ ही उसे समय और अवसर का पूर्ण ज्ञान और ध्यान होना चाहिये तथा जो कार्य अहित कर होते हुए भी शीघ्र करणीय है अथवा हितकर होते हुए भी उस समय अकरणीय है, उसे स्वयं एवं राजा को सलाह देकर करना अथवा नहीं करना चाहिये। **प्रधान** राजा के अधीन समस्त विभागों के अध्यक्षों का प्रधान अधीक्षक होता है और प्रत्येक विभाग की व्यक्तिगत जानकारी रखता हुआ राजा को उनकी वस्तुस्थिति से अवगत कराता है। **सचिव** शब्द शक्रुनीति में सेना के सर्वोच्च राज्याधिकारी के रूप में प्रयुक्त हुआ है। इसे आज की भाषा में रक्षामंत्री की संज्ञा दी जा सकती है। इसे समस्त प्रकार की चतुरंग सेनाओं (रथ, अश्व, हाथी, पैदल) तथा उष्ट्र-वाहिनियों की सूक्ष्म जानकारी के अतिरिक्त व्यूह रचना का, एवं अन्य देशों, विशेषतः शत्रु देशों की भाषाओं, उनकी सैन्य-शक्ति, उनके राजचिह्न आदि का सम्यक् ज्ञान होना चाहिये; साथ ही अपनी सैन्य शक्ति, अस्त्रशस्त्र, गोले-बारूद (अग्नि-चूर्ण), कितने सैनिक किस अवस्था में है, उन्हें कितना अभ्यास है, कितने समर्थ हैं, कितने असमर्थ हैं, आदि सभी का यथार्थ ज्ञान होना चाहिये। **मन्त्री** राजा का राजनैतिक दृष्टि से सलाहकार होता है। कब किसके साथ मैत्री, किसके साथ शत्रुता, किसके साथ उदासीनता बरती जाए, शत्रु का निग्रह करने के लिए उसके साथ साम, दाम, दण्ड और भेद इन चार उपायों में से कौन सा उपाय काम में लाया जाए, क्या करने से किस परिणाम की संभावना है, आदि राजनीतिक परिदृश्य को वह राजा के सामने उपस्थित करे।

न्यायाधीश के लिये संस्कृत ग्रन्थों में प्राड्विवाक शब्द प्रयुक्त हुआ है। "प्राट्" का अर्थ है पूछने वाला और "विवाक" का उचित-अनुचित का विवेक अथवा विभेद करने वाला। उसकी सहायता के लिये जो व्यक्ति अधिकरण में उपस्थित रहते हैं उन्हें "सभ्य" की संज्ञा दी जाती है। साक्ष्य आदि पर ध्यान रखते हुए एवं प्रश्न आदि करके सत्यता का पता लगा कर उसे निर्णय देना चाहिये। उसके निर्णय से असन्तुष्ट व्यक्ति राजा के पास अपनी याचिका दायर कर सकते हैं। राजा की आन्तरिक

परिषद में वह राजा को राज्य की सामाजिक व्यवस्था एवं प्रवर्तमान नियमों को ध्यान में रखते हुए विधिसम्मत सलाह देता है। **पण्डित** शास्त्रज्ञ होता है और वह समस्या का धर्मशास्त्रीय पक्ष देखता है, कौन से कृत्य शास्त्रीय या प्राचीन धार्मिक परम्परा के अनुरूप या विरुद्ध हैं, अथवा कौन सा कृत्य किस जनसमुदाय के लौकिक धार्मिक विश्वासों एवं क्रियाकलापों के अनुकूल या प्रतिकूल है, इस पर वह प्रकाश डालता है जिससे किसी वर्ग विशेष की धार्मिक भावना आहत न हो [2/100, 101]। **सुमन्त्र** राज्य के उस सर्वोच्च लेखाधिपति को कहते हैं जिसके लिये आज A.G. या Comptroller शब्द प्रयुक्त होता है। इस वर्ष या पिछले वर्षों में कहां से कितनी आय हुई है, किस विभाग में कितना व्यय होता है, राजकोष की वर्तमान स्थिति क्या है, कहाँ से आय और बढ़ाई जा सकती है, आदि-आदि की जानकारी वह राजा को देता है। **अमात्य** के पास राज्य की राजस्व उत्पन्न करने वाली समस्त इकाइयों की विस्तृत सूचना होती है। कितने नगर, ग्राम एवं जंगल राज्य में हैं, कितनी भूमि जोती गई है—कितनी खाली पड़ी है, वन के उत्पादों की आमदनी क्या है, खानों से क्या आय है या संभावित है, दण्ड के रूप में प्रजा से या अपराधियों से कितना धन प्राप्त हुआ है, कहाँ-कहाँ और नये कर लगाए जा सकते हैं इन सब तथ्यों की जानकारी वह राजा के सामने रखता है। सुमन्त्र एवं अमात्य पदों पर परस्पर स्थानान्तरण संभव है, यह शुक्र का वचन है।

अध्यक्षों के कर्तव्य

कौटिल्य एवं शुक्र दोनों के अनुसार राज्य का मुख्य प्रशासनतन्त्र अध्यक्षों के हाथ में होता है। किसानों से लगान एवं अन्न आदि इकट्ठा करने या व्यापारियों से लाभ का दशमांश कर के रूप में वसूलने का दायित्व समाहर्ता नामक अध्यक्ष पर होता है। वह इसके लिये एक पंजिका रखता है जिसमें सारे विवरण प्रतिदिन लिखे जाते हैं। राज्य की आय को कोशागार में जमा करने और उसका पूर्ण हिसाब रखने का कार्य **सन्निधाता** का है। बाजार की वस्तुओं के विक्रय की ठीक व्यवस्था रखने और जनता को सभी वस्तुएँ ठीक मूल्य पर उपलब्ध कराने के लिये **पण्याध्यक्ष** की नियुक्ति की जाती है। **आकराध्यक्ष** राज्य की खानों से निकलने वाली स्वर्ण-रजत-ताम्र आदि धातुओं एवं रत्नों पर दृष्टि रखता है। **आयुधागार** का भी पृथक् अध्यक्ष होता है। जनता को ठीक नाप तौल से वस्तुएँ प्राप्त हों इसके लिये भार और माप की जाँच करने के लिये **पौतवाध्यक्ष** [2/19/37] या मानाध्यक्ष की नियुक्ति की जाती है। **शुल्काध्यक्ष** का कार्य है कि गाँव से शहर की और आने वाली वस्तुओं पर चुंगी या Toll-Taxकी सही वसूली करे। तालाबों से मछली पकड़ने, पहाड़ों से पत्थर खोदने, बालू या मिट्टी खोदने के ठेकों आदि से शुल्क की वसूली भी यही करता है। कौटिल्य ने शुल्कशाला में चार या पाँच पुरुषों की अतिरिक्त नियुक्ति करने की सलाह दी है जो उधर से निकलने वाले प्रत्येक व्यक्ति का नाम पता लिखकर उसको पर्ची काट कर दें और उसके माल पर राज की मोहर लगाएँ। जो व्यापारी बिना मोहर के अपना सामान बाजार में बेचते हुए पाए जाएँ उनसे दुगना शुल्क वसूल किया जाए। कपड़ा बुनने के व्यवसाय पर दृष्टि रखने वाला व्यक्ति **सूत्राध्यक्ष** कहलाता है। यह राज्य की ओर से भी कपड़े बुनने के करघे लगा कर प्रायः विधवा या निराश्रित स्त्रियों से कपड़े बुनवाता है। इस प्रसंग में यह भी महत्त्वपूर्ण है कि क्योंकि कपड़े बुनने के कार्य में प्रायः स्त्री मज़दूरों को रखा जाता था अतः कौटिल्य ने उनकी

व्यक्तिगत सुरक्षा हेतु तथा उनके शील एवं मर्यादा की रक्षा हेतु कड़े निर्देश दिये हैं। यदि कोई अधिकारी स्त्री-कर्मचारियों के मुख की ओर एकटक निहारता रहे या उनसे संबन्धित कार्य के अतिरिक्त किसी अन्य विषय पर उनसे बात करे तो उसके लिये दण्ड की व्यवस्था है [अर्थशास्त्र, 2/23/15]—

स्त्रियाः मुखसंदर्शनेऽन्यकार्य संभाषायां वा पूर्वः साहसदण्डः।

राजा की ओर से राज के खेतों में मजदूरों से विभिन्न प्रकार की कृषि कराने वाला अधिकारी **सीताध्यक्ष** कहलाता है। बगीचे लगवा कर महल के लिये फलों का उत्पादन भी इसके कर्तव्यों में आता है। कृषि के मजदूरों को प्रतिदिन परिवार हेतु पर्याप्त भोजन देने के अतिरिक्त मास में डेढ़ पण (11/2) का वेतन भी दिया जाता था। राज्य में सुरा के उत्पादन का निरीक्षण करने और उस पर उत्पाद शुल्क प्राप्त करने के लिये **सुराध्यक्ष** की, भोजन हेतु स्वस्थ पशुओं का मांस उपलब्ध कराने और वध्यस्थलों की उचित देखरेख हेतु **सूनाध्यक्ष** की ओर गणिकाओं के व्यवसाय की व्यवस्था हेतु **गणिकाध्यक्ष** की नियुक्ति की जाती थी। नदी और समुद्र में चलने वाली नावों और विदेश से आने तथा विदेश को जाने वाले जहाजों की व्यवस्था हेतु तथा उन पर सीमाशुल्क (Custom duty)उगाहने के लिए **नावध्यक्ष** की, एवं इसी प्रकार **हस्त्यध्यक्ष, अश्वाध्यक्ष, रथाध्यक्ष, सेनाध्यक्ष,** आदि की भी विस्तृत चर्चा है। गाँव की रक्षा एवं उसका हितचिन्तन **ग्रामाध्यक्ष** करता था। पुलिस का वह बड़ा कर्मचारी जो प्रत्येक नगर और बड़े गाँव से संबद्ध रहता था, **साहसाध्यक्ष** कहलाता था और उसका काम चोरों, डाकुओं, तस्करों तथा आततायियों को पकड़ कर दण्ड देना तथा उनके अत्याचार से लोगों की रक्षा करना था। अध्यक्षों की यह सूची पूर्ण नहीं है और राजा आवश्यकतानुसार नये विभाग खोल कर उसमें भी अध्यक्ष नियुक्त कर सकता था और करता था।

वार्षिक प्रतिवेदन

सभी अधिकारियों और अमात्य तथा युवराजादि बड़े-बड़े प्रधान अधिकारियों के लिये भी यह आवश्यक था कि वे क्रमपूर्वक अपने दैनन्दिन, मासिक, वार्षिक तथा बहुवार्षिक कार्यजातों का प्रतिवेदन (Reports) तैयार रखें और यथा समय उसे राजा के समक्ष प्रस्तुत करें (शु०नी०02/295,296)।

गुप्तचर व्यवस्था

प्रायः सभी राजकीय विभाग राजा की आय से संबद्ध थे अतः अध्यक्ष के क्रियाकलापों पर दृष्टि रखने और यह सुनिश्चित करने के लिए कि अध्यक्ष या अधिकारी लोग राजकीय धन का गबन नहीं कर जाते, कौटिल्य ने एक बहुत ही प्रभावी तथा सूक्ष्म गुप्तचर-व्यवस्था लागू करने की सलाह दी है। ये गुप्तचर अध्यक्ष या अधिकारी के आस-पास रहते थे और उसके स्वभाव तथा कार्यकलाप की समस्त सूचना राजदरबार भेजते रहते थे। कौटिल्य ने गुप्तचर व्यवस्था पर अत्यधिक जोर दिया है और इसे राज्य की स्थिरता का प्रमुख कारण माना है। गुप्तचरों की कई कोटियाँ हैं जिनके नाम अर्थशास्त्र में कापटिक, उदास्थित, गृहपतिक, वैदेहक, तापस, सत्री, तीक्ष्ण, रसद तथा भिक्षुक आदि हैं। छात्र रूप में रहते हुए नगर और जनपद के व्यक्तियों के हाव भाव की जासूसी करने वाले व्यक्ति को **कापटिक** कहा जाता है।

संन्यासी के वेष में रहने वाले गुप्तचर की **उदास्थित** संज्ञा है; वह पाठशाला चलाता हुआ अपने विद्यार्थियों से गुप्तचरी कराता रहता है। गृहस्थ के वेष में रहकर राजा के लिये महत्वपूर्ण सूचनाएँ एकत्र करने वाला जासूस **गृहपतिक** तथा निर्धन व्यापारी के वेष में रहने वाले की **वैदेहक** संज्ञा है। जटाएँ धारण करके अथवा बौद्ध भिक्षु का या मुण्डित वेश बनाकर नगर के बाहर रहकर गुप्तचरी करने वाला व्यक्ति **तापस** नामक-गुप्तचर है। उसके अनेक शिष्य उसकी बहुत पहुँचे हुए सिद्ध महात्मा के रूप में प्रसिद्ध कर देते हैं और नगर के गणमान्य व्यक्ति जब उसके पास आने लगते हैं तो वह उनके मन्तव्य को जान लेता है। घूम-घूम कर विभिन्न वेशों और उपायों से अपना कार्य साधने वाले तथा क्रूर कर्मों में भी पारंगत गुप्तचर **सत्री** कहे जाते हैं। इनमें भी जो विष आदि देकर राजा के शत्रुओं को विनष्ट करते हैं **रसद** कहा जाता है (ये बन्धुषु निः स्नेहाः क्रूराश्च निरालसास्ते रसदाः)। कौटिल्य का कहना है कि राज्य के समस्त प्रमुख कर्मचारियों के पीछे गुप्तचर नैनात करने चाहिये जिससे उनकी योजनाओं और क्रिया-कलापों तथा राजभक्ति या राजद्रोह आदि की सही सूचना राजा को मिलती रहे। कोई ऐसा अध्यक्ष नहीं रहना चाहिये जिसके कार्यों की सूक्ष्म जानकारी अपने द्वारा नियुक्त, उसके विभाग में कार्य करने वाले गुप्तचर-कर्मचारियों से राजा को न हो। कुछ ऐसे भी गुप्तचर होने चाहिये जो मन्त्री युवराज, सेनापति आदि के मित्र एवं हितैषी बन कर उनके पास जाएँ और राजा की निन्दा करके राजा के विरुद्ध उनको भड़काएँ। वे कहें कि 'इस राजा को हम लोग गद्दी से उतारने या मारने की योजना बना रहे हैं। अनेक लोगों की इसमें सहमति है, आप की क्या राय है'? यदि वह उनका साथ दे तो अशुद्ध समझा जाए और यदि वह ऐसे तथा कथित मित्रों को फटकार लगा कर राजा के प्रति अपनी भक्ति प्रकट करे तो शुद्ध समझा जाए और राजा उसको और अधिक समादृत करे।

भ्रष्टाचार का निरोध

ऐसा लगता है कि राजकीय सेवा में भ्रष्टाचार की समस्या भारत में नई नहीं है। राजकीय अधिकारी, विशेषतः राजकोष के लिये धन या राजस्व संग्रह करने वाले व्यक्ति, लोभ में आकर राजकीय धन का कुछ अंश दबा सकते हैं, यह कौटिल्य को भली-भाँति ज्ञात था। वे यह भी जानते थे कि ऐसे अधिकारियों की कार्यप्रणाली इतनी सूक्ष्म होती है कि सामान्यतः बाहरी व्यक्ति को उसका पता नहीं चलता। 'जैसे जल में तैरती हुई मछली कब कितना पानी पी जाती है, इसे कोई नहीं जान सकता और जैसे यह संभव नहीं कि किसी की जिह्वा पर मधु रखा हो और वह उसका स्वाद ही न चखे; ऐसे ही अधिकारी कुछ न कुछ धन तो अपने उपयोग में ले ही लेते हैं'[8] पर जब यह एक सीमा पार कर जाए और प्रजा या राजा को इससे कष्ट होने लगे तो इसका निवारण आवश्यक हो जाता है। किसी भी विभाग में किसी एक अकेले व्यक्ति की नियुक्ति नहीं करनी चाहिये। शुक्राचार्य के अनुसार एक अधिकारी के साथ कम से कम दो और अवर-सहायक होने चाहिये और अध्यक्ष के ऊपर भी किसी अनुभवी वृद्ध व्यक्ति को उत्तराध्यक्ष बनाना चाहिये। राजा के गुप्तचरों को अधिकारियों की आय, उनका व्यय, उनके तथा उनके परिवारी-जनों के रहन-सहन, बन्धु बान्धवों की स्थिति तथा नौकरों आदि पर कड़ी दृष्टि रखनी चाहिये। कौटिल्य तथा शुक्र दोनों का मत है कि बहुत समय तक एक ही स्थान

या एक ही पद पर अधिकारी को नहीं रखना चाहिये। शुक्र के अनुसार तीन, पाँच, सात या अधिकतम दस वर्ष उससे एक विभाग में काम लेना चाहिये और उसके बाद अधिकारी को परिवर्तित कर देना चाहिये।[9] अभिलेखों में किस प्रकार हेराफेरी करके राजकीय कर्मचारी धन का गबन कर सकता है, इसके 40 प्रकार कौटिल्य ने बताए हैं (राजद्रव्याणां हरणोपायाश्चत्वारिंशत् 2/8/19)। उत्कोच लेकर राजस्व या शुल्क आदि को छोड़ देना, इस वर्ष की आय को पुरानी पंजिका में चढ़ा कर राजा के पास भेज दी गई सिद्ध करने की चेष्टा, जो भूमि देवालय, पाठशाला, विद्वान् ब्राह्मणों आदि को कर-मुक्त रूप में दी गई है, उससे भी कर या लगान वसूल कर लेना, पूरे प्राप्त हुए धन को कम करके रजिस्टर में अंकित करना और शेष हड़प जाना, तोल-माप आदि में हेराफेरी करके अपने लिये बचत कर लेना आदि-आदि कई उपायों से अधिकारी अतिरिक्त धन कमाते हैं। राजा के ''सत्री'' नामक गुप्तचर अधिकारी के अधीनस्थ कर्मचारियों के माध्यम से इसका पता लगने पर राजा को सूचना देते हैं और दण्ड-स्वरूप अधिकारी को राजा की हानि का दुगुना अपने पास से भरना पड़ता है। अधिक बड़ा अपराध सिद्ध होने पर नौकरी से निकालने का तथा यदि गबन किये हुए धन को अधिकारी द्वारा छिपे रूप में राजा के शत्रु की सहायतार्थ उपलब्ध कराया गया हो, तो अधिकारी को प्राणदण्ड दिया जाता है—

> यो महत्यर्थ समुदये स्थितः कदर्यः संनिधत्ते ऽवनिधत्ते
> ऽवस्रावयति, स्ववेश्मनि अवनिधत्ते पौर जानपदेष्ववस्रावयति पर विषये
> तस्य सत्री मन्त्रिमित्रभृत्यबन्धुपक्षमागतिं गतिं च द्रव्याणामुपलभेत।
>
> यश्चास्य परविषयतया संचारं कुर्यात् तमनुप्रविश्य मन्त्रं विद्यात्। सुविदिते
> शत्रु शासना- पदेशेनैनं घातयेत्। -
>
> –कौ०अ०2/9/29-31

वेतन निर्धारण, वितरण एवं वेतनवृद्धि

प्राचीन भारत में किसानों से कृषि की उपज का छठा भाग लगान के रूप में तथा व्यापारियों से उनके लाभांश का दसवाँ भाग आयकर विक्रय कर के रूप में लेने की प्रथा थी। धातु एवं रत्न आदि की खानें राजा के अधीन थीं। विविध प्रकार के शुल्क एवं अर्थदण्ड भी राजस्व के साधन थे। कौटिल्य का मत है कि राजा को अपनी आय का चतुर्थांश राजकीय कर्मचारियों के वेतन में व्यय करना चाहिये, चतुर्थांश का स्वयं उपभोग करना चाहिये, चतुर्थांश को दान, धार्मिक कार्य या प्रजा की भलाई में व्यय कर देना चाहिये और अवशिष्ट चतुर्थांश को भविष्य के लिये कोष में संगृहीत कर लेना चाहिये। किसको कितना वेतन दिया जाए, इसका विवरण भी अर्थशास्त्र में मिलता है। वेतन का निर्धारण पण में होता था जो 80रत्ती या लगभग 10 ग्राम भार का ताँबे का सिक्का होता था। सबसे अधिक वेतनभोगी होते थे राजा के ऋत्विक्, आचार्य, मन्त्री, पुरोहित, प्रमुख सेनापति, युवराज, राजमाता, तथा राजमहिषी जिन्हें 48000 पण वार्षिक वेतन दिया जाता था, इसी धन से युवराज एवं राजामाता आदि अपने-अपने महल में काम करनेवाले नौकरों का भी वेतन वहन करते थे। कौटिल्य का कथन है कि इतने वेतन से ही वे संतुष्ट रह सकते हैं, और राजा के प्रति कोप का कारण नहीं बनेंगे। राजा के महल की बाह्य

सुरक्षा के लिये उत्तरदायी सर्वोच्च अधिकारी है (दौवारिक) तथा महल के अन्दर की सुरक्षा देखने वाले अधिकारी (अन्तर्वंशिक), आयुधाध्यक्ष, समाहर्ता तथा भाण्डागाराध्यक्ष को 24000 पण वार्षिक वेतन दिया जाना चाहिये अन्यथा वे या तो राजस्व की हानि करेंगे या राजा की सुरक्षा में प्रमाद करेंगे। युवराज के अतिरिक्त अन्य राजकुमार, पटरानी के अतिरिक्त अन्य रानियाँ, सेना नायक, नगर निरीक्षक, व्यापाराध्यक्ष (पण्याध्यक्ष Market Supdt), कृषि अध्यक्ष, मन्त्रिपरिषद् के सदस्य, राष्ट्रपाल (I.G.या पुलिस-अधीक्षक) तथा अन्तपाल (सीमा की रक्षा के लिये नियुक्त अधिकारी) इन सबको प्रतिवर्ष 12000 पण वेतन दिया जाता है। कौटिल्य का कथन है कि इतना वेतन पाने पर ही ये राजा के अनुकूल रहेंगे और उसकी सदैव सहायता करेंगे। राजकीय निर्माण-कार्यों के अध्यक्ष, विभिन्न व्यावसायिक श्रेणियों के अध्यक्ष, हाथी, घोड़े, और रथों के प्रमुख निरीक्षक तथा जनता की शिकायत सुन कर उसका निराकरण करने वाला 'प्रदेष्टा' नामक अधिकारी 8000 वार्षिक वेतन भोगी होते हैं। सेना के रथारोही, अश्वारोही, गजारोही तथा पदाति आदि चतुरंगों के नायक एवं वन निरीक्षक 4000 पण; रथ शिक्षक, गज शिक्षक, अश्वशिक्षक, पशुशिक्षक, पशुचिकित्सक, आदि 2000 पण, शाकुनिक, ज्योतिषी, पुराणकथाकार, सारथी, स्तुतिपाठक, सुराध्यक्ष आदि 1000पण वार्षिक, तथा लेखक (क्लर्क) या पटवारी आदि कार्यालयीय कर्मचारी एवं चित्रकार आदि 500 पण वार्षिक वेतन पाते हैं। कुशीलव (नट) आदि 350 पण, साधारण कारीगर 120 पण और पशु आदि की सेवा करने वाले तथा व्यक्तिगत सेवा करने वाले घरेलू नौकरों को 60 पण वेतन वार्षिक देना चाहिये। इनको साध में भोजन और वस्त्र का (भक्तं=भात, अन्न, आधुनिक हिन्दी में भत्ता) देना स्वयंसिद्ध है। अर्थशास्त्र के अनुसार यदि राजा किन्हीं से राजकार्य हेतु कोई बेगार लेता है तो भी उसे मजदूरों को कम से कम इतना वार्षिक वेतन भोजन (भक्तं, भत्ते) सहित अवश्य देना चाहिये।

शुक्र का कथन है कि राजा या अधिकारी को वेतन देने में विलम्ब नहीं करना चाहिये और न ही किसी भृत्य का वेतन काटना चाहिये [न कुर्याद् भृतिलोपं तु तथा भृतिविलम्बनम्, 2/399]। साथ ही जैसे-जैसे भृतक गुणवान् होता जाए वैसे-वैसे राजा को प्रयलपूर्वक उसका वेतन बढ़ाते रहना चाहिये [यथा यथा तु गुणवान् भृतक स्त्रद्भृतिस्तथा। संयोज्या तु प्रयत्नेन नृपेणात्महिताय वै। 2/401]। इसमें राजा का स्वयं अपना ही हित सुरक्षित है क्योंकि कम वेतन ('हीनभृति', जो अपने ही परिवार के भरण-पोषण मात्र के लिये पर्याप्त न हो) पाने वाले भृत्य को मानों राजा स्वयं ही धीरे-धीरे अपने शत्रु में परिवर्तित कर देता है। ऐसा भृत्य आसानी से शत्रु के कहने में आ जाता है और उसी का हित-साधन करने लगता है। ऐसे लोग राजा का कार्य छोड़कर या उसे उपेक्षित करके दूसरों का भी कार्य करके पेट भरते हैं और सदा राजा के छिद्र [दोष/कमियाँ] खोजते फिरते हैं, उसके धन को हरते हैं और प्रजा को लूटते हैं।

ये भृत्या हीनभृतिका शत्रवस्ते स्वयं कृताः।
परस्य साधकास्ते तु छिद्रकोशप्रजा हराः।।

—2/403

किन्तु समय पर उचित वेतन पाए हुए, राजा से सम्मान पाए हुए, एवं उसके मृदुवचनों से प्रसन्न, सेवक अपने स्वामी को कभी नहीं छोड़ते—

भृतिदानेन संतुष्टा मानेन परिवर्द्धिताः।
सान्त्विता मृदुवाचा ये न त्यजन्त्यधिपं हि ते।।
-2/419

अनुशासनात्मक कार्यवाहियाँ

यदि कोई राज्यकर्मचारी ठीक कार्य न करे, उसमें असावधानी या प्रमाद करे तो उसका अनुशासन भी आवश्यक है। अनुशासनात्मक उपायों (Disciplinary measures) के रूप में तीन का परिगणन किया है-

(1) कर्मचारी को बुलाकर एकान्त में डाँटना,

(2) वेतन का कुछ अंश काट लेना तथा

(3) प्रबल अर्थदण्ड देना (जुर्माना करना) ।

वे आगे यह भी कहते हैं कि किसी भी दशा में कर्मचारी का जनसामान्य के समक्ष या सभा में सार्वजनिक रूप से अपमान नहीं करना चाहिये, नहीं तो वह राजा का शत्रु हो जाता है-

वाक्पारुष्या न्यूनभृत्या स्वामी प्रबल दण्डतः।
भृत्यं प्रशिक्षयेन्नित्यं, शत्रुत्वं स्वपमानतः।।
-2/418

कार्यालयीय प्रक्रिया

कार्यालयीय प्रक्रिया में कौटिल्य ने प्रत्येक विभाग में अभिलेखों को अद्यतन रखने और प्रत्येक विवरण की सावधानीपूर्वक पंजिका में प्रविष्टि करने पर बहुत बल दिया है (निबन्धयेत्)। पंजिकाएं कैसे बनाई जाएं और किस विधि से आगत-निर्गत, आय व्यय आदि का उल्लेख हो इसका विवरण शुक्रनीति आदि में विस्तार से है। जिस प्रकार आज किसी कार्य हेतु कार्यालयों के अध्यक्षों को आवेदन देने की प्रथा है, लगभग वैसी ही प्राचीन काल में भारत में भी थी। शुक्रनीति (2/361-372) में इसका विस्तार से वर्णन है। राजा की मन्त्रिपरिषद् (कैबिनेट) में विचार हेतु कोई आवेदन के लिये एक लम्बा पत्र लिया जाए और उसे ऐसा मोड़ा जाए कि चतुर्थांश ऊपर नीचे तथा बाँई ओर (हाशिये के रूप में) खाली रहे तथा शेष त्रिचतुर्थांश (तीन चौथाई) भाग में लेख सीधी रेखाओं में, सुवाच्य तथा समान अक्षरों में लिखा जाए। लेख को राजदरबार में देने पर सर्वप्रथम राजा के मन्त्री, प्राड्विवाक (न्यायाधीश), पण्डित तथा दूत (गुप्तचराध्यक्ष) विभिन्न दृष्टियों से उस पर विचार करके अपना मत उस

पर लिखें और ठीक लगने पर "मुझे इसमें आपत्ति नहीं है।" स्वाविरुद्ध लेख्यंमिदं लिखेयुः प्रथमं त्विमे, 2/366क ख]ऐसी टिप्पणी दें। इसके बाद अमात्य देखकर "ठीक है" (अमात्यः साधु लिखनमस्त्येतत् प्राग् लिखेदयम् 366 ग घ) ऐसा लिखे, तत्पश्चात् सुमन्त्र लिखे "मैंने इस पर भली भाँति विचार कर लिया है" [सम्यग् विचारितमिति सुमन्त्रो विलिखेत्ततः,367क ख]। फिर प्रधान लिखे "यह सत्य और यथार्थ है" [सत्यं यथार्थ मिति व प्रधानं विलिखेत् स्वयं]। इसके बाद प्रतिनिधि उस लेख को देखकर उस पर लिखे "यह स्वीकृति करने योग्य है" (अंगीकर्तु योग्यमिति ततः प्रतिनिधि लिखेत्)। इसके बाद युवराजअपने हाथ से लिखे "इसे स्वीकार करना चाहिये" [अंगीकर्तव्यमिति च युवराजो लिखेत् स्वयम्] और तत्पश्चात् राजपुरोहित लिखे "यह मुझे भी स्वीकार है।" सबसे बाद में राजा" "अंगीकृतम्" अर्थात् "स्वीकृत किया गया" यह लिखकर, अपनी मोहर अपने हस्ताक्षरों के नीचे लगा दे (अंगीकृतमिति लिखेत् मुदयेच्च ततो नृपः]। केवल राजा ही नहीं, नीचे के भी समस्त अधिकारियों को अपनी-अपनी मोहर से लेख को अंकित करना चाहिये ["स्व स्वमुद्रा चिह्नितं च लेख्यान्ते कुर्यरेव हि, 369ग घ]। यदि युवराज यदि व्यस्तता वश लेख पर कुछ न लिख सकें तो मन्त्रीगण सम्मिलित रूप से युवराज एवं राजा से मिलकर मौखिक चर्चापूर्वक उस पर राजादेश लिख दें, अपनी मोहर लगा दें, और बाद में राजा को दिखा दें, जिस पर राजा केवल "दृष्टम्" (Seen,देखा) लिख दे।

कार्यान्तर स्याकुलत्वात् सम्यक् द्रष्टुं न शक्यते।
युवराजादिभिर्लेख्यं, तदनेन च दर्शितम्।
समुद्रं विलिखेयुर्वै सर्वे मन्त्रिगणास्ततः।
राजा दृष्टमिति लिखेद् द्राक सम्यग्दर्शनाक्षमः।।
–2/370,371]।

उपरिलिखित प्रक्रिया राजदरबार में आवेदन देकर राजादेश प्राप्त करने की है। विभागीय अध्यक्षों के कार्यालयों में अपेक्षाकृत कम कर्मचारी और अधिकारी होने के कारण प्रक्रिया छोटी और सरलतम रही होगी।

शुक्राचार्य का यह भी कथन है कि राजकीय कर्मचारी को बिना लिखित राजाज्ञा के कोई कार्य नहीं करना चाहिये और राजा को भी बिना लिखे कोई छोटी या बड़ी आज्ञा नहीं देनी चाहिये। भ्रम हो जाना मनुष्य के स्वभाव में है और भ्रम निवारणार्थ लेख ही अन्तिम प्रमाण होता है। शुक्र यहाँ तक कहते हैं कि जो राजा बिना लिखे केवल मौखिक आदेश देता है या जो भृत्य बिना लिखित आज्ञा के कुछ कर डालता है, वे दोनों चोर हैं-

न कार्यं भूतकः कुर्यात् नृपलेखाद्विना क्वचित्।
नाज्ञापयेल्लेख्यकेन विनाऽल्पं वा महन्नृपः।
भ्रान्तेः पुरुषधर्मत्वाल्लेख्यं निर्णायकं परम्।।
अलेख्यमाज्ञापयति यो विना लेख्यं करोति यः।
राजकृत्यमुभो "चौरो" तौ भृत्यनृपती सदा।।
–2/291, 292

जिन लोगों की धारणा है कि आज की टिप्पणी एवं आदेश वाली कार्यालयीय प्रक्रिया अंग्रेजों की देन है और यह लम्बी और जटिल है, उन्हें इस पर ध्यान देना चाहिये। लिखित एवं हस्ताक्षरित लेख में प्रामाणिकता के साथ-साथ एक बाध्यता भी रहती है। इसीलिये शायद संस्कृत में उक्ति है कि शतं वद, एकं मा लिख', भले ही सौ बात कहो लेकिन एक भी लिख कर मत दो।

शुक्रनीति राजदरबार से निर्गत अथवा अन्यत्र तैयार किये गये अनेक प्रकार के लेखों की चर्चा करती है जिनमें "आज्ञापत्र" "जयपत्र" (Decree) "प्रज्ञापनपत्र" "शासनपत्र" प्रसाद लेख (Ietter of appreciation,Testimomial)"भोग पत्र" (पुरुषावधिक, कालावधिक) "भागलेख" (Mutation)"दानपत्र" "क्रयपत्र" सादिपत्र (रुक्का) "ऋणलेख" "क्षेमपत्र" "वेदनापत्र" आदि प्रमुख हैं। (2/300-319)।

कर्मचारियों के सेवा नियम

शुक्रनीति आदि में उल्लिखित राजकर्मचारियों के सेवा नियमों में से अनेक ऐसे हैं जो अत्यन्त आधुनिक प्रतीत होते हैं। आइये, जरा इन पर दृष्टि डालें-

स्थानान्तरण

अधिकारी के एक विभाग से दूसरे विभाग में अथवा अन्यत्र स्थानान्तरण की चर्चा हम कर चुके हैं। शुक्र का कहना है कि एक पद पर किसी भी व्यक्ति को लम्बे समय तक नहीं रखना चाहिये। साथ ही यदि वह एक पद के अयोग्य है तो भी उसे दूसरे विभाग में स्थानान्तरित कर देना चाहिये। दीर्घकाल तक एक ही अधिकार पाकर कौन भला मदान्ध नहीं हो जाएगा?

नाधिकारं चिरं दद्याद यस्मै कस्मै सदा नृपः।
अधिकारेऽक्षमं दृष्ट्वा ऽन्याधिकारे नियोजयेत्।।
अधिकारमदं पीत्वा को न मुह्येत् पुनश्चिरम्।
अतः कार्यक्षमं दृष्ट्वा कार्येऽन्ये तं नियोजयेत्।।

पदोन्नति

जब किसी अधिकारी को हटाया जाए तो उससे नीचे का अधिकारी यदि कुशल हो तो उसकी पदोन्नति (Promotion) करके उसको उच्चतर पद पर बैठाना चाहिये—

तत्कार्ये कुशलं चान्यं तत्पदानुगतं खलु।
नियोजयेत् वर्तन तु तदभावे तथा परम्।।

यदि वह योग्य न हो, तभी दूसरे की नियुक्ति वहाँ पर की जाए। कर्मचारी के सेवा निवृत्ति होने पर यदि उसका पुत्र योग्य हो तो उसी को पहले प्राथमिकता दी जाए—

तद्गुणो यदि तत्पुत्रस्तत्कार्ये तं नियोजयेत्।

वैसे शुक्राचार्य का अधिकारियों की योग्यता का आकलन करने के संबन्ध में मत अत्यन्त उदार है। वे कहते हैं- जैसे प्रत्येक अक्षर मन्त्र का काम कर सकता है और जैसे कोई ऐसा वृक्षमूल नहीं है जो किसी न किसी रोग में औषध के काम न आता हो, वैसे ही ऐसा कोई पुरुष संसार में नहीं है जो सभी कार्यों के लिये अयोग्य हो और उससे कोई कार्य सिद्ध न हो सकता हो, केवल उसकी क्षमता और शक्ति को पहचानने और उसे सही स्थान पर और उपयुक्त कार्य में लगाने का प्रश्न है। योग्य पुरुष दुर्लभ नहीं होता, योग्य नियोजक—या काम लेने वाला—दुर्लभ होता है—

अमन्त्रमक्षरं नास्ति, नास्ति मूलमनौषधम्।
अयोग्यः पुरुषो नास्ति योजकस्तत्र दुर्लभः।।

–2/127

गणवेश (वर्दी) एवं सेवा-चिह्न

शुक्र का कथन है कि कार्य में संलग्न अथवा एक विभाग वाले सेवकों को एक ही प्रकार के वस्त्र तथा एक प्रकार की पगड़ी आदि देनी चाहिये जिससे दूर से ही उनकी पहचान हो सके। साथ ही उनको उनके पद का सूचक रत्न सुवर्ण, रजत पीतल ताँबे या लोहे का बना हुआ यथायोग्य (पदानुसार) कोई लान्छन (चिह्न या बैज) आदि भी देना चाहिये जिससे उनके विभाग का और राजकीय सेवा में उनकी प्रामाणिकता का बोध हो सके—

यत्कार्ये विनियुक्ता ये कार्यां कैरङ्कयेच्च तान्।
लोहजैस्ताम्रजै रीतिभवे रजत संभवैः।।
सौवर्णे रत्नजैर्वापि यथायोग्यैः स्वलाञ्छनैः।
प्रविज्ञानाय दूरात्तु वस्त्रैश्च मुकुटैरपि।

–2/426,427

संघनिर्माण का निरोध

सभी राजकीय कर्मचारियों को पृथक्-पृथक् प्रकार के वाहनों का उपयोग (पालकी, रथ, अश्व, हाथी आदि) राजा की ओर से स्वीकृत होना चाहिये, साथ ही कौन से और कितने प्रकार के बाजे उनके प्रयाण या आगमन के समय बजने चाहिये इसका भी विधान राजा की ओर से होना चाहिये। यह इसलिये भी आवश्यक है कि अधिकारियों और कर्मचारियों को अपनी आपेक्षित श्रेष्ठता या हीनता का बोध रहे और वे सब मिलकर कोई गुट या संघ न बना सकें—

वाद्यवाहनभेदैश्च भृत्यान् कुर्यात् पृथक्-पृथक्।

राजा को भी अपने भृत्यों की योग्यता, उनकी स्वाभिभक्ति तथा श्रेष्ठता या अवरता के आधार पर कुछ ऐसा व्यवहार करना चाहिये कि सब अपने को सम्मानित अनुभव करें पर अपने को दूसरों से पृथक् समझें—किसी को वह कोई वाहन पुरस्कारस्वरूप प्रदान करें, किसी को कोई आभूषण, किसी को छत्र, किसी को चामर, किसी को दीपिका (मशाल साथ ले जाने का अधिकार), किसी को वस्त्र, किसी को भोज्य सामग्री, किसी को फल, किसी को ताम्बूल, किसी को अपने साथ सत्कारपूर्वक अपने आसन पर बैठाने से, किसी को सम्पूर्ण आसन प्रदान करके, किसी को प्रणाम करके, किसी को क्षमादान करके, किसी से कुशलप्रश्न करके, किसी की ओर देखकर केवल मुस्कराने से, किसी के साथ भोजन करने से, किसी के साथ दूर तक गमन करके या किसी की सभा में सब के समक्ष प्रशंसा करके। इस प्रकार कर्मचारियों को प्रसन्न और वश में रखने के अनेक उपाय हैं (2/421-425)

काम करने के घण्टे एवं रुग्णाकाश

अर्थशास्त्र के प्राचीन ग्रन्थों में भृत्यों से दिन/रात्रि में कितने घण्टे काम लिया जाए इसका भी विचार किया गया है।

शुक्रनीति के अनुसार किसी भी घरेलू नौकर से प्रतिदिन 12 घण्टे से अधिक काम नहीं लिया जा सकता है। दिन में उसे एक प्रहर अर्थात् तीन घण्टे का अवकाश अपने घर के कार्यों को करने के लिये दिया जाए और रात्रि में केवल एक प्रहर (तीन घण्टे), अर्थात् लगभग 9 बजे तक उससे काम लेकर, तीन प्रहर या 9 घण्टे उसे आराम करने दिया जाए।

जो व्यक्ति दैनिक वेतन (दिहाड़ी) पर काम करते हों उन्हें दिन में कार्य के मध्य आधे प्रहर या डेढ़ घण्टे की छुट्टी देनी चाहिये जिसमें वे विश्राम तथा भोजन आदि कर सकें—

भृत्यानां गृहकृत्यार्थं दिवा यामं समुत्सृजेत्।
निशि यामत्रयं नित्यं, दिनभृत्येऽर्धयामकम्।।
शु०नी०2/407

यहाँ यह उल्लेख कर दिया जाए कि लगभग 1915 ई० तक यूरोप में उद्योगों में काम करने वाले मजदूरों को दिन में लगातार पूरे 12 घण्टे काम करना होता था और बीच में उन्हें भोजनावकाश नहीं दिया जाता था। निर्देश ये थे कि वे अपने घर से सैण्डविच आदि ऐसा भोजन बनाकर लाएँ जिसे वे काम करते-करते खा सकें। रुग्णावकाश का कोई प्रावधान नहीं था और बीमारी की अवस्था में काम पर न आने पर कोई वेतन नहीं दिया जाता था, जब कि शुक्रनीति का कहना है कि यदि कोई राजकर्मचारी बीमार हो जाए तो, यदि उसकी सेवा पाँच वर्षों की है तो उसे तीन मास तक वेतन का तीन चौथाई भाग राजा देता रहे और यदि सेवा इससे कम या अधिक हो तो कम या अधिक समय तक यह तीन-चौथाई वेतन दिया जा सकता है किन्तु किसी भी दशा में लम्बी बीमारी की स्थिति में इस प्रकार वेतन देने की अवधि 6 मास से अधिक नहीं होनी चाहिये। यदि किसी की बीमारी केवल एक सप्ताह की हो तो उसका कोई वेतन नहीं काटा जाना चाहिये और पूरा भुगतान कर देना चाहिये।

यदि कोई भृत्य लगातार एक वर्ष तक रुग्ण रहे और काम पर न आ पाए तो उसके स्थान पर उस भृत्य की ही सलाह से उसके किसी प्रतिनिधि की नियुक्ति (तदर्थ?) कर लेनी चाहिये और रुग्ण भृत्य का वेतन उसे दिया जाना चाहिये। किन्तु यदि कोई अत्यन्त गुणी और योग्य कर्मचारी लम्बी बीमारी से ग्रस्त हो तो बीमारी की दशा में भी उसे आधा वेतन देते रहना चाहिये—

पादहीनां भृतिं त्वार्ते दद्यात् त्रैमासिकीं ततः।
पञ्चवत्सरभृत्ये तु न्यूनाधिक्यं यथा तथा।।
षाण्मासिकी तु दीर्घार्ते तदूर्ध्वं न च कल्पयेत्।
नैव पक्षार्धभार्तस्य हातव्याऽल्पापि वे भृतिः।
संवत्सरों षिस्यापि ग्राह्यः प्रतिनिधिस्ततः।
सुमहद्गुणिनं त्वार्त भृत्यर्धं कल्पयेत् सदा।।

–2/409-411

आकस्मिक अवकाश

शुक्राचार्य का यह भी मत है कि प्रतिवर्ष प्रत्येक भृत्य को एक पक्ष या 15 दिन का सतैतनिक अवकाश दिया जाना चाहिये जिससे वह अपने व्यक्तिगत या परिवारगत कर्तव्यों का निर्वाह कर सके—

सेवां विना नृपः पक्षं दद्याद् भृत्याय वत्सरे।

–2/412

बोनस

राजा को प्रत्येक वर्ष वार्षिक वेतन का आठवाँ भाग प्रत्येक कर्मचारी को पारितोषिक (Bonus या इनाम)के रूप में देना चाहिये, अथवा यदि उसने कोई प्रदत्त कार्य समय से पूर्व ही संपादित करके दिखा दिया है तो उस कार्य की लागत का (अथवा राजा को हुई बचत का) आठवाँ भाग कर्मचारी को पारितोषिक के रूप में प्रदान करना चाहिये—

अष्टमांशं पारितोष्यं दद्याद् भृत्याय वत्सरे।
कार्याष्टमांशं वा दद्यात् कार्यं द्रागधिकं कृतम्।।

–2/415

भविष्य निधि

कर्मचारी के वेतन का छठवाँ अथवा एक चौथाई भाग राजा को प्रतिमास काटकर अपने पास जमा कर लेना चाहिये। दो या तीन वर्ष बाद इस प्रकार कटौती किये गये धन का आधा भाग उसे भृत्य को लौटा देना चाहिये और आधा फिर अपने पास जमा रखना चाहिये। अथवा यदि राजा चाहे,

या कर्मचारी माँग करे, तो इस प्रकार राजकोष में जमा धन पूरा का पूरा कर्मचारी को लौटाया जा सकता है—

षष्ठांशंवाचतुर्थाशं भृतेर्भृत्यस्य पालयेत्।
दद्यात्तदर्ध भृत्याय द्वित्रिवर्षेऽखिलं तु वा।।

–2/417

पेन्शन का प्रावधान

जिस राजकर्मचारी ने राज्य की 40 वर्षों तक सेवा कर ली हो उसे सेवानिवृत्त कर देना चाहिये और उसे सदैव अर्थात् मृत्युपर्यन्त अन्तिम वेतन का ठीक आधा भाग वृत्ति के रूप में प्रदान करते रहना चाहिये। जब उसकी मृत्यु हो जाए तो यदि उसका पुत्र अभी छोटी वयस् का हो और काम करने योग्य न हो तो कर्मचारी की वृत्ति (अर्थात् पेन्शन) का आधा उस बालक को, अथवा पुत्र न होने पर उसकी सुशील, अविवाहिता पुत्री को अथवा कर्मचारी की पत्नी को पारिवारिक पेन्शन के रूप में राजा को अपने कल्याण के लिये यावज्जीवन प्रदान करते रहना चाहिये—

चत्वारिंशत् समा नीताः सेवया येन वै नृपः।
ततः सेवां विना तस्मै वृत्यर्ध कल्पयेत् सदा।।
यावज्जीवं तु तत्पुत्रेऽक्षमे बाले तदर्धकय्।
भार्यायां वा सुशीलायां कन्यायां वा स्वश्रेयसे।।

–2/413-414

शुक्रनीति के ये दो अथवा केवल प्रथम श्लोक मध्य युग के कुछ राजनीति संबन्धी ग्रन्थों में भी उद्धृत हैं। अभी हाल में हमने उड़ीसा से प्राप्त एक 'राज्याभिषेक विधि' नामक ग्रन्थ का सम्पादन किया है जिसके "राजनीति" भाग का प्रारंभ ही इस श्लोक से होता है। 40 वर्षों की पूर्ण सेवा अवधि के उल्लेख से प्रतीत होता है कि उस समय निवृत्ति की आयु संभवतः 65 वर्ष की थी क्योंकि कि सामान्यतः गुरुकुल में शिक्षा समाप्त करने के बाद ही लगभग 25 वर्ष की आयु में शिक्षित व्यक्ति सेवा में किये जाते रहे होंगे। हाँ, शारीरिक श्रम से संबद्ध कर्मचारियों की अवस्था सेवा-निवृत्ति के समय 58या 60 वर्ष हो सकती है क्योंकि उनकी नियुक्ति 18 या 20 वर्ष की अवस्था में भी हो सकती थी। उल्लेखनीय है कि कई विकसित पाश्चात्य देशों में सेवानिवृत्ति की आयु आज भी 65 वर्ष ही है।

कर्मचारी की मृत्यु पर आश्रित की नियुक्ति

सक्रिय सेवाकाल में यदि राजकीय कर्मचारी की मृत्यु हो जाती है तो उसके पुत्र आदि किसी आश्रित को सरकारी नौकरी देने का नियम लगभग 25-30 वर्ष पूर्व हमारे देश में बनाया गया है। आश्चर्य है कि 8 वीं शताब्दी के प्राचीन भारत में भी मृतक के परिवार के प्रति सहानुभूति प्रदर्शित करते हुए उसके पुत्र को नौकरी देने का यह नियम प्रचलित था किन्तु इसमें शर्त यह थी कि कर्मचारी की मृत्यु स्वामी का कार्य सम्पादित करते हुए (on official duty) हुई हो। शुक्र आगे यह भी कहते

हैं कि यदि कर्मचारी का पुत्र अभी छोटा हो तो जब तक वह अपनी योग्यतानुसार किसी पद का कार्य करने के योग्य न हो जाए तब तक पिता का सम्पूर्ण वेतन नियमितं रूप से परिवार को मिलता रहे—

स्वामिकार्ये विनष्टो यस्तत्पुत्रे तद्भृतिं वहेत्।
यावदूद्बलो ऽन्यथा पुत्रगुणान् दृष्ट्वा भृतिं वहेत्।।
–2/416

कौटिल्य ने भी अर्थशास्त्र में व्यवस्था दी है कि राजकार्य में मृत कर्मचारी का वेतन एवं भत्ते (अन्न आदि) आजीवन उसकी पत्नी या पुत्र आदि को मिलना चाहिये—कर्मसु मृतानां पुत्रदारा भक्तवेतनं लभेरन्।

अर्थशास्त्र एवं शुक्रनीति के उक्त संदर्भों को पढ़ते समय ऐसा लगता है मानों हम 20वीं शताब्दी में रचित राज्य-कर्मचारियों की नियम पुस्तिका पढ़ रहे हों। भविष्यनिधि, बोनस, अनुग्रहराशि, सेवा निवृत्ति के पेन्शन आदि लाभ तथा सहानुभूति के आधार पर किसी पारिवारिक सदस्य की नियुक्ति आदि नियम पश्चिम जगत् में भी 20वीं शती में अस्तित्व में आए हैं। इनका मौर्यकाल से ही हमारे प्राचीन ग्रन्थों में पाया जाना भारतीय चिन्तकों, अर्थशास्त्रियों एवं राजनीतिशास्त्रियों की इस दृष्टि की पुष्टि करता है कि राज्यतन्त्र का अस्तित्व वस्तुतः जन कल्याण के लिये है और इस तथ्य को दृष्टि में रखते हुए हम प्राचीन भारतीय राज्य या State को सच्चे अर्थों में एक Welfare State या 'कल्याणकारी-राज्यतंत्र' की संज्ञा दे सकते हैं।।

संदर्भ

1. कुलं सत्त्वं वयः शीलं दाक्षिण्यं क्षिप्रकारिता।
अविसंवादिता सत्यं वृद्धसेवा कृतज्ञता।।
दीर्घदर्शित्वमुत्साहः शुचिता च स्थूललक्षता
विनीतता धार्मिकता गुणाः साध्वाभिगामिकाः।।
का०नी०4/6,8

लोकाचारा श्रियो राज्ञां दुराया दुष्परिग्रहा।
तिष्ठन्त्याप इवाधारे चिरमात्मनि संस्कृते।
का०नी०4/5

2. कामक्क्रोधस्तथा मोहो लोभो मानो मदस्तथा।
षड्वर्गमुत्सृजेदेनम् अस्मिंस्त्यक्ते सुखी नृपः।।
1/143

3. अतिभीरूमतिदीर्घसूत्रं चातिप्रमादिनम्।
व्यसनादूविषयाक्रान्तं न भजन्ति नृपं प्रजाः।।
1/140

4. सत्यवान् गुण संपन्न स्तथाऽभिजनबान्धवी।
सुकुलश्च सुशीलश्च सुकर्मा च निरालसः।।
यथा करोत्यात्मकार्यं स्वामिकार्य ततोऽधिकम्।
चतुर्गुणेन यत्नेन कायवाङ्मानसेन च।
भृत्या च तुष्टो मृदुवाक् कार्यदक्षः शुचिर्दृढः।
नाक्षेप्ता तद्विरं काञ्चित् तन्त्रयूनस्याप्रकाशकः।
अदीर्घसूत्रः सत्कार्ये ह्यसत्कार्ये चिरक्रियः।।
न श्लाघते स्पर्धते वा, नाभ्यसूयति निन्दति।
नेच्छत्यन्याधिकारं हि निःस्पृहो मोदते सदा।।
तद्दत्तवस्त्रभूषादिधारकस्तत्पुरो ऽनिशम्।
भृतितुल्यव्ययी दान्तों दयालुः शूर एव च।।

शुक्रनीति 2/57-64

5. प्रोक्तं पुण्यतमं सत्यं परोपकरणं तथा।
आज्ञायुक्तांश्च भृतकान् सततं धारयेन् नृपः।।

–2/206

6. ये भृत्या हीनभृतिका ये दण्डेन प्रधर्षिताः।
शठाश्च कातरा लुब्धाः समक्षप्रियवादिनः।।
नास्तिका दाम्भिकाश्चैवासत्यवाचोऽप्यसूयका :।
ये चायमानिता, येऽसद्वाक्यैर्मर्मणि भेदिताः।।
रिपोर्मित्राः सेवकाश्च पूर्ववैरानुबन्धिनः।
चण्डाः साहसिका धर्महीना नैते सुसेवकाः।।

–2/66-69

7. हिंसागरीयसी सर्वपापेभ्योऽनृतभाषणम्।
गरीयस्तरमेताभ्यां युक्तान् भृत्यान्न धारयेत्।।

–2/207

8. मत्स्या यथान्तः सलिले चरन्तो
ज्ञातुं न शक्याः सलिलं पिबन्तः।
युक्तास्तथा कार्यविधौ नियुक्ताः
ज्ञातुं न शक्या धनमाददानाः।।
यथा ह्यनास्वादयितुं न शक्यं
जिह्वातलस्थं मधु वा विषं वा।
अर्थस्तथा ह्यर्थचरेण राज्ञः
स्वल्पोऽप्यनास्वादयितुं न शक्यः।।

कौ०अ० 2/9/36,37

9. एकस्मिन्नधिकारे तु पुरुषाणां त्रयं सदा।
नियुञ्जीत प्राज्ञतमं मुख्यमेकन्तु तेषु वै।।
द्वौ दर्शकौ तु तत्कार्ये हायनैस्तन्निवर्तनम्।
त्रिभिवाथञ्चभिर्वापि सप्तभिर्दशभिश्च वा।।
दृष्ट्वा तत्कार्यकौशल्ये तथा तं परिवर्तयेत्।
शु०नी०2/110-112

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 3, July, 1998.

(A, λ) माध्यों के द्वारा फूरियर श्रेणी की प्रबल संकलनीयता

एम० के० शुक्ला तथा एम० पी० सचान

गणित विभाग, शासकीय स्वायत्त शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, शहडोल (म० प्र०)

[प्राप्त - अक्टूबर 15, 1997]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखकों ने फूरियर श्रेणी की प्रबल (A, λ) संकलनीयता पर तीन प्रमेयों को सिद्ध किया है।

Abstract

On the strong summability of a Fourier series by (A, λ)means. *By* M. K. Shukla and M. P. Sachan, Department of Mathematics, Government Autonomous P. G. College, Shahdol.

In the present paper the authors have proved three theorems on the strong (A, λ) summability of a Fourier series by giving a strong (A, λ) summability estimate in each of the first two theorems and a sufficient condition for the same in the third. They have also given three corollaries concerning the strong summability of the said series by Abel means.

1. परिभाषाएँ तथा संकेतन

एक श्रेणी $\sum^{\infty} u_n$ अपने आंशिक योग $S_n = \sum_0^n u_k$ के अनुक्रम $\{S_n\}$ सहित एक सान्त संख्या S तक प्रबल संकलनीय कही जाती है यदि

$$\sum_{k=0}^{n} |S_k - S| = O(n) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty \tag{1}$$

(हार्डी तथा लिटिलवुड[1])

श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ को लागरैथमिक (L) माध्यों के द्वारा S तक प्रबल संकलनीय कहा जाता है यदि

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|S_k - S|}{K} x^K = O[|\log(1-x)|] \text{ ज्यों-ज्यों } x \to 1-0 \tag{1.2}$$

[राय[2]]

श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ बोरेल की विधि द्वारा S तक प्रबलतः संकलनीय तथा प्रबलतः संकलनीय (B) कही जाती है यदि

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p^K}{K!} |S_k - S| = O(e^p) \text{ ज्यों-ज्यों } p \to \infty \tag{1.3}$$

[कैथल[3]]

अन्य प्रबल संकलनीयताएँ जो (1.1) (1.2) तथा (1.3) द्वारा परिभाषित संकलनीयताओं के समरूप हैं उनकी भी आशा की जाती है। इसलिये हम फूरियर श्रेणी की प्रबल संकलनीयता निम्न रूपों में परिभाषित करते हैं।

परिभाषा : एक अनन्त श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ अपने आंशिक योगफलों के अनुक्रम $\{S_n\}$ सहित दी हुई है।

यदि

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} r^n |S_n - S| = O\left\{\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right\} \tag{1.4}$$

ज्यों-ज्यों $r \to 1$.

जहाँ

$$\binom{\lambda+n}{n} = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)}{1, 2, \dots n}, \quad \lambda+1>0 \text{ तथा } 0<r<1$$

तो हम कहते हैं कि श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ बिन्दु x पर S तक प्रबलतः संकलनीय (A, λ) है।

माना कि $f(x)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π और अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय (L) है।

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \equiv \sum_{0}^{\infty} n A_n(x) \tag{1.5}$$

हम निम्नलिखित संकेतनों का प्रयोग प्रायः करेंगे

$$\phi(t) = f(x)+t) + f(x-t) - 2S'$$

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)|du$$

$$w_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} r^n \varepsilon_v \frac{\sin nt}{t}$$

2. प्रस्तावना

(A, λ) संकलनीयता का सूत्रपात बोरवीन[4] ने किया और मिश्रा[5] ने इसका सम्प्रयोग प्रमेय A को सिद्ध करते हुए फूरियर श्रेणी में किया।

प्रमेय A : यदि

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t |\phi(u)|du = 0(t) \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0 \tag{2.1}$$

तब $f(x)$ की फूरियर श्रेणी बिन्दु x पर S तक संकलनीय (A, λ) है।

कैथल[3] ने प्रबल बोरेल संकलनीयता की व्याख्या करते हुए दिखलाया है कि प्रतिबंध $\Phi(t) = 0(t/\log 1/t)$ ज्यों-ज्यों $t \to 0$ फूरियर श्रेणी की प्रबल बोरेल संकलनीयता का आश्वासन नहीं देती। उन्होंने स्थापित किया कि

प्रमेय B : यदि $f(t) \in L_1$ तथा यदि

$$\Phi(t) = 0\left(\frac{t}{\log\frac{1}{T}}\right) \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0 \tag{2.2}$$

$$\sum_{K=o}^{\infty} \frac{p^k}{L!} |S_K - S| = 0\left(e^p \log\log p\right) \text{ ज्यों-ज्यों } p \to 0 \tag{2.3}$$

जहाँ S_n फूरियर श्रेणी वे आंशिक योग फल को बताता है।

प्रमेय : यदि (2.1) सत्य हो तो

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} r^n |S_n - S| = 0\left[\frac{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}{\lambda+1}\right] \tag{2.4}$$

ज्यों-ज्यों $r \to 1$ जहाँ S_n फूरियर श्रेणी केnवें आंशिक योगफल का सूचक है और $\lambda+1>0$

प्रमेय 2 : यदि

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} r^n |S_n - S| = O\left[\frac{\log\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}\right] \text{ ज्यों-ज्यों } r \to 1 \qquad (2.5)$$

जहाँ S_n फूरियर श्रेणी का nवाँ आंशिक योगफल हैं तथा $\lambda + 1 > 0$

हमारा उद्देश्य (2.2) की अपेक्षा कुछ अधिक प्रबल प्रतिबन्ध ज्ञात करना भी है जो फूरियर श्रेणी (1.5) की प्रबल (A, λ) संकलनीयता को आश्वस्त करने के लिये पर्याप्त है । इस उद्देश्य से हम निम्नलिखित भी सिद्ध करेंगे -

प्रमेय 3. यदि $\Delta > 1$ के लिये तनिक भी

$$\phi(t) = 0(t^{\Delta}), \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0 \qquad (2.6)$$

तो फूरियर श्रेणी (1.5) $\lambda > -1$ के लिये x बिन्‍ ः S तक प्रबलतः संकलनीय (A, λ) है ।

3. प्रारम्भिक प्रमेयिकाएँ

अपने प्रमेयों के लिये हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी ।

यदि $\varepsilon_\kappa = \varepsilon_\kappa(x) = \pm 1$ को इस तरह परिभाषित किया जाय कि $k = 0, 1, 2, \ldots,$ के लिये $\varepsilon_\kappa \sin kt \geq 0$ बना दें तो $0 < t < 1 - r$ तथा $0 < r < 1$ के लिए

$$\omega_r(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} r^n \varepsilon_\nu \frac{\sin nt}{t}$$

$$= O\left\{\frac{1}{(1-r)^{\lambda+2}}\right\} \text{ ज्यों-ज्यों } r \to 1$$

उपपत्ति

$0 < t < 1 - r$ एवं $0 < r < 1$ के लिये

$$w_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} r^n \in_\nu \frac{\sin nt}{t}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} r^n . n$$

$$= \frac{(\lambda+1)}{1} r.1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2} r^2.2 + \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1.2.3} r^3.3 + ..$$

$$= (\lambda+1) r \left[1 + \frac{(\lambda+2)}{1} r + \frac{(\lambda+2)(\lambda+3)}{1.2} r^2 + \ldots \right]$$

$$= (\lambda+1) r \left[(1-r)^{-\lambda-2} \right]$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}} \right] \text{ ज्यों-ज्यों } r \to \overline{1}$$

प्रमेयिका 2. $0 < r < 1$ तथा $1 - r < t < \pi$ के लिये

$$w_r(t) = O\left[\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+1}} \right] \text{ ज्यों-ज्यों } r \to \overline{1}$$

उपपत्ति - दिये हुए r तथा t के लिये-

$$w_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} r^n \varepsilon_v \frac{\sin n t}{t}$$

$$\leq \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} r^n$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}} \right] \text{ ज्यों-ज्यों } r \to \overline{1}$$

4. प्रमेय 1 की उपपत्ति

फूरियर श्रेणी (1.5) के x वें आंशिक योगफल S_n को निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है-

$$S_n - S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \sin n t \, d t + 0(1) \qquad (4.1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right] \frac{\phi(t)}{t} \sin n t \, d t + 0(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} \sin n t\, dt + 0(1) \qquad (4.2)$$

चूँकि दक्षिण पक्ष का द्वितीय समाकल रीमान-लेवेस्क प्रमेय के द्वारा $n \to \infty$ से O(1) है, जहाँ $\delta > 0$ को इतना लघु चुना जाता है कि प्रतिबन्ध (2.1) $t \leq \delta$ के लिये सत्य है। [टिशमाश[6]]

पुनश्च ε_κ की परिभाषा प्रमेयिका 1 की भाँति करते हुए हम (4.2) तथा परिभाषा (1.4) के बल पर लिखेगे कि

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda+n}{n} r^n |S_n - S| = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda+n}{n} r^n \varepsilon_n (S_n - S)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} |\phi(t)| \left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda+n}{n} r^n \varepsilon_n \frac{\sin n t}{t}\right] dt$$

$$+ 0\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda+n}{n} r^n\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} |\phi(t)| w_r(t)\, dt + 0\{(1-r)^{-\lambda-1}\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{\delta}\right] |\phi(t)| w_r(t)\, dt + 0\{(1-r)^{-\lambda-1}\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{\delta}\right] |\phi(t)| w_r(t) | w_r(t)\, dt + 0\{(1-r)^{-\lambda-1}\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[X_1 + X_2\right] + 0\,\{(1-r)^{-\lambda-1}\} \qquad (4.3)$$

प्रमेयिका 1 तथा परिकल्पना (2.1) का उपयोग करने पर

$$X_1 = \int_0^{1-r} |\phi(t)| w_r(t)\, dt$$

$$\leq \int_0^{1-r} |\phi(t)| O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+2}}\right] dt$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+2}}\right] \int_0^{1-r} |\phi(t)| dt$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+2}}\right], 0\,(1-r)$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right] \text{ ज्यों-ज्यों } r \to \overline{1} \qquad (4.4)$$

खण्डशः समाकलन करने तथा प्रमेयिका 2 एवं परिकल्पना (2.1) का प्रयोग करने पर

$$X_2 = \int_{1-r}^{\delta} |\varphi(t)|\, w_r(t)\, dt$$

$$< \int_{1-r}^{\delta} |\phi(t)|\, O\left[\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+1}}\right] dt$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right]\left[\frac{\Phi(t)}{t} + \int \frac{\Phi(t)}{t^2} dt\right]_{1-r}^{\delta}$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right]\left[0(1) + \int_{1-r}^{\delta} 0(1/t)\, dt\right]$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right] [0(1) + 0\{\log\delta - \log(1-r)\}]$$

$$= O\left[\frac{\log\{1/(1-r)\}}{(1-r)^{\lambda+1}}\right], \text{ ज्यों-ज्यों } r \to \overline{1} \qquad (4.5)$$

अन्त में (4.3), (4.4) तथा (4.5) से प्राप्त परिणामों का संग्रह करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda+n}{n}r^n\,|S_n-S| \;=\; O\left[\frac{\log\{1/(1-r)\}}{(1-r)^{\lambda+1}}\right] \text{ ज्यों-ज्यों } r\to 1^-$$

इस तरह प्रमेय पूर्ण हुई।

5. प्रमेय 2 की उपपत्ति

प्रमेय 1 की उपपत्ति का अनुसरण करते हुए हम लिखेंगे

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda+n}{n}r^n\left|S_n-S\right| = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1-r}+\int_{1-r}^{\delta}\right]|\phi(t)|\,w_r(t)\,dt+0\left\{\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[Y_1+Y_2\right]+0\left\{\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right\} \qquad (5.1)$$

जहाँ $\delta>0$ इतना लघु है कि परिकल्पना (2.1) $t\leq\delta$ एवं $0<r<1$ के लिये तुष्ट होती है।

प्रमेय 1 की उपपत्ति में जिस तरह x_1 का अनुमान लगाया जाता है उसी तरह अग्रसर होने तथा (2.2) का प्रयोग करने पर

$$Y_1 = O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right], \text{ ज्यों-ज्यों } r\to 1^- \qquad (5.2)$$

आंशिक समाकलन, प्रमेयिका 2 तथा परिकल्पना (2.2) से हम पाते हैं कि

$$Y_2 \leq \int_{1-r}^{\delta}|\phi(t)|\,O\left[\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+1}}\right]dt$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right]\left[\frac{\Phi(t)}{t}+\int\frac{\Phi(t)\,dt}{t^2}\right]_{1-r}^{\delta}$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right]\left[o(1)+\int_{1-r}^{\delta}o\left\{\frac{1}{t\log 1/t}\right\}dt\right]$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right]\left[o(1)+o\left\{-\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right\}_{1-r}^{\delta}\right]$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right]\left[o(1)+o\left\{\log\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right]$$

$$= O\left[\frac{\log\log\left\{\frac{1}{(1-r)}\right\}}{(1-r)^{\lambda+1}}\right], \text{ज्यों ज्यों } r \to 1^- \quad (5.3)$$

(5.1), (5.2) एवं (5.3) के बल पर यह सिद्ध हुआ कि

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda+n}{n} r^n \left|S_n - S\right| = 0\left[\frac{\log\log\left\{\frac{1}{(1-r)}\right\}}{(1-r)^{\lambda+1}}\right] \text{ ज्यों-ज्यों } r \to 1^-$$

इस तरह प्रमेय 2 पूर्णतः स्थापित हुई।

6. प्रमेय 3 की उपपत्ति

प्रमेय 1 की उपपत्ति से हम लिखेंगे

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda+n}{n} r^n \left|S_n - S\right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{\delta}\right] |\varphi(t)|\, w(t)\, dt + 0\left\{\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[Z_1 + Z_2\right] + 0\left\{\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right\}, \text{ ज्यों-ज्यों } r \to 1^- \quad (6.1)$$

जहाँ $\lambda + 1 > 0$, $0 < r < 1$ तथा $\delta > 0$ इतना लघु है कि प्रतिबन्ध (2.6) $t \leq \delta$ के लिये सत्य है।

चूँकि परिकल्पना (2.6) से (2.1) का बोध होता है, इसलिये प्रमेय 1 की उपपत्ति के χ_1, के अनुमान के द्वारा हम पाते हैं-

$$Z_1 + O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } r \to 1^- \quad (6.2)$$

अपरंच, खण्डशः समाकलन करने तथा प्रमेयिका 2 तथा परिकल्पना (2.6) का उपयोग करने पर

$$Z_2 = \int_{1-r}^{\delta} |\phi(t)| w_r(t)\, dt$$

$$\leq \int_{1-r}^{\delta} |\phi(t)|\, O\left[\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+1}}\right] dt$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right]\left[\left\{\frac{\Phi(t)}{t}\right\}_{1-r}^{\delta} + \int_{1-r}^{\delta} \frac{\Phi(t)}{t^2}\, dt\right]$$

$$= O\left[\frac{1}{[(1-r)^{\lambda+1}}\right]\left[\left\{0\left(t^{\Delta-1}\right) dt\right\}_{1-r}^{\delta} + \int_{1-r}^{\delta} 0\left(t^{\Delta-2}\right) dt\right]$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right] [0(1)]$$

$$= O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right] \text{ ज्यों-ज्यों } r \to 1^- \tag{6.3}$$

क्योंकि $\Delta > 1$

अन्त में (6.1), (6.2) एवं (6.2) के बल पर यह स्पष्ट है कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} r^n \left|S_n - S\right| = O\left[\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right], \text{ज्यों-ज्यों } r \to 1^-$$

इससे प्रमेय 3 की उपपत्ति पूरी हुई।

7. टिप्पणियाँ :

यह बताना रोचक होगा कि $\lambda + 1 > 0$ के लिये (A, λ) संकलनीयता विधि आबेल संकलनीयता में समानीत हो जाती है यदि $\lambda = 0$. अतः हमें निम्नलिखित उपप्रमेय प्राप्त होते हैं।

उपप्रमेय 1. यदि (2.1) सत्य हो तो $0 < r < 1$ के लिये

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \left|S_n - S\right| = O\left[\frac{\log\left\{\frac{1}{(1-r)}\right\}}{(1-r)}\right] \text{ ज्यों-ज्यों } r \to 1^- \tag{7.1}$$

जहाँ S_n फूरियर श्रेणी (1.5) के nवें आंशिक योगफल के लिये आया है।

उपप्रमेय 2. यदि (2.2) तुष्ट हो तो $0<r<1$ के लिये

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \left|S_n - S\right| = 0 \left[\frac{\log \log \left\{\frac{1}{(1-r)}\right\}}{(1-r)}\right] \text{ ज्यों-ज्यों } r \to 1^- \qquad (7.2)$$

S_n फूरियर श्रेणी के नवें आंशिक योगफल के लिये आया है।

उपप्रमेय 3. यदि $\Delta > 1$ के लिये कुछ भी

$$\Phi(t) = 0(t^{\Delta}) \text{ ,ज्यों-ज्यों } r \to 0 \qquad (7.3)$$

तो फूरियर श्रेणी (1.5) बिन्दु x पर आबेल माध्यों के द्वारा S तक प्रबलतः संकलनीय है।

इन उपप्रमेयों की स्वतन्त्र उपपत्तियाँ निकाली जा सकती हैं।

निर्देश

1. हार्डी, जी० एच० तथा लिटिलवुड, जे० ई०, Comptes Rendus, 1913, **156**, 1307-1309,

2. राय, ओ० पी०, Proc. Japan Acad.. 1966, **42,** 243-246.

3. कैथल, पी० डी०, पी०एच डी० थीसिस, सागर विश्वविद्यालय 1968

4. बोरवीन, डी, Proc. Camb. Phil. Soc., 1957, **53,** 319-322.

5. मिश्रा, बी०, Math. Student, 1972, **40A**, 331-337.

6. टिश्मार्श, ई० सी०, The Theory of Functions, आक्सफोर्ड 1961

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 3, July, 1998.

निमग्न किण्वन द्वारा सिट्रिक अम्ल उत्पादन पर प्रारम्भिक पी-एच० तथा शर्करा सान्द्रता का प्रभाव

एस० पी० सिंह तथा जे० के० सिंह

रसायन विभाग, मगध विश्वविद्यालय, बोधगया (बिहार)

के० पी० कमल

रसायन विभाग, विनोबा भावे विश्वविद्यालय, हजारीबाग (बिहार)

[प्राप्त - दिसम्बर 8, 1997]

सारांश

निमग्न किण्वन विधि द्वारा सिट्रिक अम्ल के उत्पादन पर प्रारम्भिक पी-एच० तथा शर्करा सान्द्रता का प्रभाव देखा गया। यह पाया गया कि सिट्रिक अम्ल की उच्चतर प्राप्ति के लिये अनुकूल पी-एच० 4.5-5.0 है। जहाँ तक उत्पादन माध्यम की शर्करा सान्द्रता की बात है, यह पाया गया कि 12% सान्द्रता से सिट्रिक अम्ल में अधिकतम रूपान्तरण होता है।

Abstract

Effect of initial pH and sugar concentration on citric acid production by submerged fermentation. *By* S.P. Singh and J.K. Singh, Department of Chemistry, Magadh University, Bodh Gaya (Bihar) and K.P. Kamal, Department of Chemistry Vinoba Bhave University, Hazaribagh (Bihar).

The effect of initial pH and sugar concentration on citric acid production by submerged fermentation has been studied. It has been observed that a pH of 4.5- 5.0 is optimum for the higher yields of citric acid. So far as sugar concentration of the production medium is concerned it has been found to be 12% for maximum conversion into citric acid.

किसी भी कवकीय किण्वन प्रक्रम के लिये हाइड्रोजन आयन सान्द्रता तथा शर्करा सान्द्रता अत्यन्त महत्वपूर्ण कारक हैं। पी-एच० तथा शर्करा सान्द्रता में किसी प्रकार के परिवर्तन से सूक्ष्मजीवों (microbes) की क्रियाशीलता के साथ-साथ सिट्रिक अम्ल की प्राप्ति भी प्रभावित होती है।[1-12] सामान्यतया सरलतम शर्करा के रूप में ही क्रियाधारों (Substrates) का उपयोग सूक्ष्मजीवी कोशिकाओं द्वारा किया जाता है। हम यहाँ पर निमग्न किण्वन विधि द्वारा सिट्रिक उत्पादन पर प्रारम्भिक पी-एच० तथा शर्करा सान्द्रता के प्रभाव का वर्णन करेंगे।

प्रयोगात्मक

सूक्ष्मजीवों की स्क्रीनिंग (छँटनी) विभिन्न स्थानों से मिट्टी के नमूने एकत्र किये गये और स्ट्रेप्टोमाइसिन रोज बेंगाल ऐगर पर क्रमशः तनूकरण विधि से प्लेटित किये गये। प्लेटों को 30^0 पर 5 दिन तक इनकुबेट किया गया और ऐस्परजिलस नाइगर की कालनियों को सबूराउड ऐगार में स्थानान्तरित कर दिया गया।

प्रभेद : ऐस्परजिलस नाइगर जे० के० 5 का प्रयोग सिट्रिक अम्ल उत्पादक प्रभेद के रूप में किया गया।

माध्यम : निम्नलिखित माध्यम प्रयुक्त किये गये।

रख रखाव के लिये : पेप्टोन (10g), डेक्स्ट्रोस (40g), ऐगर (20g) सबूराउड का ऐगार तथा आसुत जल 1 dm3 तक। **बीजाणुक जनन** (स्पोरुलेशन) ग्लीसरीन (10 g) शीरा (7.5 g), यीस्ट निष्कर्ष (5g), सोडियम क्लोराइड (20g), $MgSO_4 . 7H_2O$ (0.005g), KH_2PO_4 (0.006g), $Fe(NH_4)_2 (SO_4)_2 . 6H_2O$ (0.16g), $CuSO_4 . 5H_2O$(0.001g), $CaSO_4 . 2H_2O$ (0.250g) ऐगार (20g) तथा आसुत जल 1 dm^3 तक **उत्पादन हेतु** शर्करा (100 g), NH_4NO_3 (1.5 g), $KH_2 PO_4$ (0.25g), $MgSO_4$, $7H_2O$ (0.25g), विआयनित जल 1 dm^3 तक तथा पी-एच० 4.5-5.0

संवर्धन की दशाएँ - परीक्षण नलियों में रखे इनाकुलेट किये साबूराउड के ऐगार को 29-30^0 से० पर 3-4 हफ्तों के लिये इनकुबेट किया गया। इनसे प्राप्त बीजाणुओं (Spores) को रोक्स बोतलों में रखे बीजाणुक जनन माध्यम में इनाकुलेट करने के लिये प्रयुक्त किया गया। इसके लिये ट्वी 80 जल (0.1%) काम में लाया गया और एक किण्वनक (Fumenter) में उत्पादन माध्यम में इनाकुलेट किया गया। माध्यम को आटोक्लेव में 15 पौंड भाप दाब में 15 मिनट तक निर्जर्मित किया गया। किण्वन का ताप विलोडन तथा वातन द्वारा 29-30^0 से० पर स्थिर रखा गया। मूंगफली का तेल झागरोधी के रूप में प्रयुक्त किया गया।

विश्लेषण : किण्वित ब्राथ में कुल अम्लता की मात्रा 0.1 N NaOH से अनुमापित करके ज्ञात की गई। सिट्रिक अम्ल का मापन लियोपोल्ड तथा वाल्ट्र[14] की द्वारा वर्णित विधि से किया गया। सिट्रिक अम्ल की शुद्धता को पत्र क्रोमैटाग्राफी द्वारा [15] जिसमें एथिल ऐसीटेट ऐसीटिक अम्ल जल

सारणी 1

सिट्रिक अम्ल उत्पादन पर माध्यम के प्रारम्भिक पी-एच० का प्रभाव (इनकुबेशन अवधि 8दिन)

प्रारम्भिक पी-एच०	सिट्रिक अम्ल की प्राप्ति		उत्पादन माध्यम
	mg/mL	% रूपान्तरण	
2.5	41.60	29.71	शर्करा : 140 g/L
3.0	51.50	36.78	NH_4 NO_3: 2.5 g/L
4.0	62.50	44.11	KH_2PO_4 . 1.0 g/L
4.5	70.50	50.35	$MgSO_4$ 7H2O: 0.25 g/L
5.0	78.20	55.85	आसुत जल :1L
6.0	62.80	44.85	ताप 29-30°C
7.0	55.60	39.71	इष्टतम इनकुबेशन अवधि : 8 दिन

सारणी 2

सिट्रिक अम्ल उत्पादन पर शर्करा सान्द्रता का प्रभाव

इनकुबेशन अवधि(दिन)	10% CA	10% %	12% CA	12% %	14% CA	14% %	20 CA	20
	mg/ml	रूपान्तरण	mg/mL	रूपान्तरण	mg/mL	रूपान्तरण	mg/mL	रूपान्तरण
4	53.50	53.50	44.30	36.91	—	—	—	—
5	70.25	70.25	52.81	44.00	49.30	35.21	38.50	19.25
6	78.88	78.88	68.20	56.83	63.71	45.50	44.75	22.37
7	85.25	85.25	104.00	86.66	96.25	68.75	56.20	28.10
8	88.10	88.10	107.20	89.33	111.20	79.42	67.35	33.67
9	89.25	89.25	113.10	94.25	118.10	83.35	71.50	19.25
10	89.25	89.25	113.10	94.25	118.10	84.35	78.15	35.75
11	—	—	—	—	118.10	84.35	81.20	40.60
12	—	—	—	—	—	—	90.00	45.00
13	—	—	—	—	—	—	110.00	55.00
14	—	—	—	—	—	—	113.00	56.50

CA **सिट्रिक अम्ल; उत्पादन माध्यम** NH_4NO_3 : 1.5 g/L; KH_2PO_4 : 0.25 g/L **तथा** $MgSO_4$: 0.25 g/L

(2:1:1 आयतन के अनुसार) विलायक प्रणाली के रूप में प्रयुक्त हुआ तथा गैस-द्रव क्रोमेटोग्राफी द्वारा ज्ञात किया गया। सिट्रिक अम्ल की प्राप्ति को प्रारम्भिक शर्करा के आधार पर सूचित किया गया।

$$\text{प्रतिशत प्राप्त} = \frac{\text{कुल उत्पन्न सिट्रिक अम्ल}}{\text{डाली गई शर्करा}} \times 100$$

बची हुई शर्करा को कोल्स विधि[16] द्वारा ज्ञात किया गया यद्यपि बची शर्करा के परिणाम नहीं दिये जा रहे।

परिणाम तथा विवेचना

प्रारम्भिक पी-एच० तथा शर्करा सान्द्रता के प्रभाव का निमग्न किण्वन विधि द्वारा सिट्रिक अम्ल उत्पादन पर पड़ने वाले प्रभावों का अध्ययन करने से जो मान प्राप्त हुए वे सारणी 1 तथा 2 में दिये जा रहे हैं।

प्रारम्भिक पी-एच का प्रभाव : यद्यपि सिट्रिक अम्ल के विषय में उपलब्ध साहित्य बताता है कि सिट्रिक अम्ल उत्पादन के लिये प्रारम्भिक पी-एच० 2.5-3.0 होना चाहिए तथा इससे उच्चतर पी-एच० पर सिट्रिक अम्ल के साथ-साथ आक्सैलिक अम्ल बनता है किन्तु सारणी 1 में दिये गये मानों से स्पष्ट है कि सिट्रिक अम्ल उत्पादन के लिये इष्टतम पी-एच० 4.5-5.0 है। जब पी-एच० 2.5 कर दिया गया तो सिट्रिक अम्ल की प्राप्ति काफ़ी कम हो गई ।

सान्द्रता का प्रभाव : अनुकूलतम सान्द्रता 14 g/L पाई गई। शर्करा की विभिन्न सान्द्रताएँ उत्पादन माध्यम में प्रयुक्त की गईं। सारणी 2 में परिणाम अंकित हैं। 2% शर्करा के प्रयोग से अधिकतम रूपान्तरण प्राप्त हुआ (7-8 दिनों में 8%) जबकि 14% शर्करा के प्रयोग से उससे कम (8-9 दिनों में 79-84%) तथा 20% शर्करा के प्रयोग से 14 दिनों में केवल 56% रूपान्तरण हुआ।

निर्देश

1. गार्डनर, जे० एफ०, जेम्स, एल० वी तथा रुब्बो, एस० डी० : J. Gen. Microbial 1956, **14**, 228.
2. ओजाकी, ए० तथा ताकेशिता, के० : Hakko Kyokaishi, 1955, **13**, 282.
3. चोपड़ा, सी० एल०, काजी, जी० एन०, चतुर्वेदी, एस० के० गैंद, सी० एन० तथा अटल, सी० के० : J. Chem. Tech. Biotechnol. 1981, **31**, 122.
4. चोपड़ा, सी० एल०, गैंडा सी० एन०, काजी, जी० एम०, चतुर्वेदी, एस० के० तथा सोमल, पी० : Research and Industry, 1983, **28**, 107.
5. श्रीवास्तव, ए० एस० तथा डे, एस० के० : *Zbl. Bakt. II Abst.* 1980, **135**, 408.

6. हमिसा, एफ० ए०, अबूजै, ए० जेड० ए० तथा रदवान, ए० ए० : *Zbl. Bakt. II Abst.* 1980, **135**, 332 .

7. टण्डन, एस० पी० तथा श्रीवास्तव, ए० एस० : Sydowia Annales Mycologici Ser II 1971, **25**, 137 .

8. श्रीवास्तव, ए० एस० : Sydowia Annales Mycologici Ser II 1972, **26**, 67.

9. श्रीवास्तव, एस० के० तथा डे, एस० के० : Sydowia, Annales Mycologici SEr II 1972, **26**, 133.

10. सिन्हा एल० के०, सिंह, एस० पी०, राठौर एम०, सिन्हा, आर० पी० तथा सिंह, बी के० : Indian J. Agric. Chem, 1988, **21**, 43.

11. सिंह, एस० पी०, प्रसाद , अजय तथा प्रसाद, अखिलेश्वर : Indian J. Agric, Chem. 1993, **26**, 107.

12. सिंह, एस० पी०, वर्मा, ए० के०, सिंह वी० के० तथा कमल, के० पी० :Asian J. Chem. 1997, **9**, 886.

13. बलट्टी, ए०, मोरिसी, जी, तथा गुआलंडी, जी० : Industria Quim 1968, **26**, 122

14. लियोपोल्ड एच० तथा वाल्ट्र जेड० : Nahrung 1958, **2**, 532

15. नाकानिशी, टी०, यामातो० एम०, किमुरा, के० तथा टनाकाई : J. Ferment Technol., 1972, **50**, 855

16. कोल्स, एस० डब्ल्यू० : Practical Physiological Chemistry, W. Heffer and Sons Ltd. Cambridge, England 1942, पृष्ठ 167.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 3, July, 1998.

I-फलन का अध्ययन

विश्व मोहन व्यास तथा अर्जुन के० राठी

गणित विभाग, डूंगर महाविद्यालय, बीकानेर (राजस्थान)

[प्राप्त—जून 1, 1998]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन में फॉक्स के H-फलन एवं इनायत हुसैन[6] एवं बुशमान तथा श्रीवास्तव[2] के H-फलन के हाल ही में राठी[8] द्वारा सार्वीकरण I-फलन के लिए सामान्य गुणधर्म, रूपान्तरण सूत्र एवं सर्वसमिकाएँ प्राप्त की गई हैं। विशिष्ट दशाओं के रूप में चौरसिया[3], राठी[7] एवं देवड़ा तथा राठी[4] द्वारा ज्ञात किये गये सूत्र प्राप्त होते हैं।

Abstract

A study of I-function. *By* Vishwa Mohan Vyas and Arjun K. Rathie, Department of Mathematics, Dungar College, Bikaner, (Rajasthan).

In this paper elementary properties, transformation formula and identities for the I-function which is generalization of the Fox's H-function introduced recently by Rathie have been obtained. The results earlier obtained by Chaurasia, Rathie and Devra and Rathie follow as special cases of our main results.

1. प्रस्तावना

हाल ही में बहुचर्चित फॉक्स[5] एवं ब्राक्समा[1] के H-फलन का सार्वीकरण राठी[8] ने I-फलन द्वारा किया जिसे निम्नवत् परिभाषित एवं अंकित किया जायेगा।

$$I^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right] = (2\pi i)^{-1} \int_L \theta(s) \,.\, z^s \, ds \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\theta(s) = \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma^{b_j}(\beta_j - B_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma^{a_j}(1 - \alpha_j + A_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma^{b_j}(1 - \beta_j + B_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma^{a_j}(\alpha_j - A_j s)} \cdot z^s \, ds \tag{1.2}$$

जहाँ $\alpha_j (j = 1, 2, \ldots, p)$ तथा $\beta_j (j, 2, \ldots, q)$ संमिश्र संख्याएँ हैं तथा $A_j > 0$, $(j = 1, 2, \ldots, p)$ एवं $\beta_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ व a_j, $(j = 1, 2, \ldots, p)$ एवं $b_j (j = 1, 2, \ldots, q)$ अपरिमेय मान ग्रहण करते हैं तथा मेलिन-बार्निज प्रकार का एक उपयुक्त कंटूर L है और प्राचल इस प्रकार संकुचित रहते हैं कि I-फलन सार्थक रहता है।

इसी प्रपत्र में राठी[8] ने यह भी दर्शाया है कि (1.1) के दाहिने पक्ष का समाकल पूर्णतया अभिसारी होता है जबकि $\theta > 0$ तथा $|\arg z| < \theta\pi/2$, जहाँ

$$\theta = \sum_{j=1}^{m} B_j b_j - \sum_{j=m+1}^{q} B_j b_j + \sum_{j=1}^{n} A_j a_j - \sum_{j=n+1}^{p} A_j a_j \tag{1.3}$$

अधिक जानकारी के लिए देखें राठी[7]।

2. प्रमुख सूत्र

(अ) इस खण्ड में I-फलन के लिए निम्नलिखित सामान्य गुणधर्म व्युत्पन्न किये जा सकते हैं जो I-फलन की परिभाषा से तुरन्त सिद्ध किये जा सकते हैं अतः इन्हें हम यहाँ बिना उपपत्ति के दे रहे हैं।

$$z^k I^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right] = I^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(\alpha_j + A_j k, A_j; a_j)_p \\ {}_1(\beta_j + B_j k, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

$$I^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right] = k\, I^{m,n}_{p,q}\left[z^k \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right] \tag{2.2}$$

$k > 0$ के लिए।

$$I_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(0,\ \alpha;\ 1),\ {}_2\left(\alpha_j,\ A_j;\ a_j\right)_p\\ {}_1\left(\beta_j,\ B_j;\ b_j\right)_{q-1},\ (r,\ \alpha;\ 1)\end{matrix}\right.\right]$$

$$= (-1)^r\, I_{p,q}^{m,n-1}\left[z\left|\begin{matrix}{}_2\left(\alpha_j,\ A_j;\ a_j\right)_p,\ (0,\ \alpha;\ 1)\\ (r,\ \alpha;\ 1),\ {}_2\left(\beta_j,\ B_j;\ b_j\right)_q\end{matrix}\right.\right] \qquad (2.3)$$

जहाँ r एक पूर्णांक हैं।

$$I_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}{}_1\left(\alpha_j,\ A_j;\ a_j\right)_p\\ {}_1\left(\beta_j,\ B_j;\ b_j\right)_q\end{matrix}\right.\right] = I_{q,p}^{n,m}\left[\frac{1}{Z}\left|\begin{matrix}{}_1\left(1-\beta_j,\ B_j;\ b_j\right)_q\\ {}_1\left(1-\alpha_j,\ A_j;\ a_j\right)_p\end{matrix}\right.\right] \qquad (2.4)$$

3. प्रमुख रूपान्तरण-सूत्र

यह देखा जा सकता है कि (1.1) में आये A_j, B_j में से कोई भी शून्य हो तो भी I-फलन की परिभाषा सार्थक होती है और I-फलन के संगत सूत्र भी प्राप्त होते हैं।

उदाहरणार्थ —

$$I_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(\alpha,\ 0;\ a),\ {}_2\left(\alpha_j,\ A_j;\ a_j\right)_p\\ {}_1\left(\beta_j,\ B_j;\ b_j\right)_q\end{matrix}\right.\right]$$

$$= \Gamma^a(1-\alpha)\, I_{p-1,q}^{m,n-1}\left[z\left|\begin{matrix}{}_2\left(\alpha_j,\ A_j;\ a_j\right)_p\\ {}_1\left(\beta_j,\ B_j;\ b_j\right)_q\end{matrix}\right.\right] \qquad (3.1)$$

जहाँ $p \geq n \geq 1$, $\mathrm{Re}\,(1-\alpha) > 0$

$$I_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}{}_1\left(\alpha_j,\ A_j;\ a_j\right)_p\\ (\beta,\ 0;\ b),\ {}_2\left(\beta_j,\ B_j;\ b_j\right)_q\end{matrix}\right.\right] = \Gamma^b(\beta)\, I_{p,q-1}^{m-1,n}\left[z\left|\begin{matrix}{}_1\left(\alpha_j,\ A_j;\ a_j\right)_p\\ {}_2\left(\beta_j,\ B_j;\ b_j\right)_q\end{matrix}\right.\right]$$

जहाँ $q \geq m \geq 1,\ \text{Re}(\beta) > 0$ (3.2)

इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि A_j, B_j में से कोई भी ऋणात्मक हो तो भी I-फलन सार्थक होता है और I-फलन के लिए संगत सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं।

$$I_{p,q}^{m,n}\left[z \left| \begin{matrix} (\alpha, -h;\ a),\ {}_2\left(\alpha_j, A_j;\ a_j\right)_p \\ {}_1\left(\beta_j, B_j;\ b_j\right)_q \end{matrix} \right.\right]$$

$$= I_{p-1,q+1}^{m+1,n-1}\left[z \left| \begin{matrix} {}_2\left(\alpha_j, A_j;\ a_j\right)_p \\ (1-\alpha, h;\ a),\ {}_1\left(\beta_j, B_j;\ b_j\right)_q \end{matrix} \right.\right] \tag{3.3}$$

जहाँ $p \geq n \geq 1$

$$I_{p,q}^{m,n}\left[z \left| \begin{matrix} {}_1\left(\alpha_j, A_j;\ a_j\right)_p \\ (\beta, -h;\ b),\ {}_2\left(\beta_j, B_j;\ b_j\right)_q \end{matrix} \right.\right]$$

$$= I_{p+1,q-1}^{m-1,n+1}\left[z \left| \begin{matrix} (1-\beta, h;\ b),\ {}_1\left(\alpha_j, A_j;\ a_j\right)_p \\ {}_2\left(\beta_j, B_j;\ b_j\right)_q \end{matrix} \right.\right] \tag{3.4}$$

जहाँ $p-1 \geq n \geq 0$

सूत्र (3.1) से (3.4) के समान्तर अन्य सूत्र लेखकों के पास सुरक्षित हैं।

4. सर्वसमिकाएँ

इस खण्ड में I-फलन के लिए निम्नलिखित तीन सर्वसमिकाएँ व्युत्पन्न की गई हैं।

$$I_{p+1,q+1}^{m,n}\left[z \left| \begin{matrix} {}_1\left(\alpha_j, A_j;\ a_j\right)_p,\ (\sigma, \mu;\ 1) \\ {}_1\left(\beta_j, B_j;\ b_j\right)_q,\ (\sigma, \mu;\ 1) \end{matrix} \right.\right]$$

$$= (2\pi i)^{-1}\left[e^{i\pi\sigma}\, I^{m,n}_{p,q}\left[ze^{-i\pi\mu}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p\\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q\end{matrix}\right]\right.$$

$$\left. - e^{i\pi\sigma}\, I^{m,n}_{p,q}\left[ze^{i\pi\mu}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p\\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q\end{matrix}\right]\right] \qquad (4.1)$$

जहाँ $n \leq p,\ m \leq q$

$$e^{i\pi\sigma}\, I^{m,n}_{p,q}\left[ze^{i\pi\mu}\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p\\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q\end{matrix}\right]$$

$$= \pi\left[I^{m,n}_{p+1,q+1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p,\ \left(\frac{1}{2}-\sigma, \mu; 1\right)\\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q,\ \left(\frac{1}{2}-\sigma, \mu; 1\right)\end{matrix}\right]\right.$$

$$\left. + i\, I^{m,n}_{p+1,q+1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p,\ (1-\sigma, \mu; 1)\\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q,\ (1-\sigma, \mu; 1)\end{matrix}\right]\right] \qquad (4.2)$$

जहाँ $n \leq p,\ m \leq q$

$$I^{m,n}_{p,q}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_{p-1},\ (\sigma+r, \mu; 1)\\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_{q-1},\ (\sigma+r, \mu; 1)\end{matrix}\right]$$

$$= (-1)^r\, I^{m,n}_{p,q}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}{}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_{p-1},\ (\sigma, \mu; 1)\\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_{q-1},\ (\sigma, \mu; 1)\end{matrix}\right] \qquad (4.3)$$

जहाँ $n < p,\ m < q$ तथा r एक पूर्णांक है।

5. उपपत्ति

(4.1) को सिद्ध करने के लिए हम इसके बायीं ओर के I-फलन को मेलिन-बार्निज समाकलन के पदों में व्यक्त करते हैं और निम्नलिखित परिणामों का उपयोग करते हैं।

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} = \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2\pi i} \tag{5.1}$$

थोड़े से सरलीकरण के बाद दो भागों में अलग करके और फिर (1.1) की सहायता से विवेचना करने पर हमें (4.1) प्राप्त होगा। इसी प्रकार निम्नलिखित परिणाम—

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) = \pi \sec \pi z \tag{5.2}$$

तथा

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z \tag{5.3}$$

के उपयोग से (4.2) की प्राप्ति होगी।

इसी प्रकार सम्बन्ध

$$\Gamma(\alpha - r)\,\Gamma(1 - \alpha + r) = (-1)^r\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha) \tag{5.4}$$

जहाँ r एक पूर्णांक है, उपयोग लाने पर (4.3) प्राप्त होगा।

6. विशिष्ट दशायें

1. सूत्र (2.1) से (2.4) में जब $a_j = 1, j = n+1, \dots p$ एवं $b_j = 1, j = 1, \dots, m$ तो I-फलन संगत $\overline{H}$ फलन में परिणत हो जाता है और हमें देवड़ा तथा राठी[4] द्वारा $\overline{H}$- फलन[2] के संगत सूत्र प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार जब (2.1) से (2.4) में $a_j = 1, j = 1, \dots p$ तथा $b_j = 1, j = 1, \dots, q$ लेते हैं तो I-फलन संगत ज्ञात H-फलन[1] में परिणत हो जाता है।

2. सूत्र (3.1) से (3.4) में जब $a_j = 1, j = n+1, \dots, p$ एवं $b_j = 1, j = 1, \dots, m$ लेने पर I-फलन संगत H-फलन में परिणत हो जाता है और हमें देवड़ा तथा राठी[4] द्वारा $\overline{H}$–फलन के संगत सूत्र प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार यदि (3.1) से (3.4) में $a_j = 1, j = 1, \dots p$ तथा $b_j = 1, j = 1, \dots q$ लेते हैं तो I-फलन संगत ज्ञात H-फलन में परिणत हो जाता है और हमें चौरसिया[3] एवं राठी[7] द्वारा ज्ञात H-फलन[1,5] के संगत सूत्र प्राप्त होते हैं।

3. सूत्र (4.1) से (4.3) में जब $a_j = 1, j = n+1, \ldots p$ एवं $b_j = 1, j = 1, \ldots m$ लेने पर हमें देवड़ा तथा राठी[4] द्वारा प्राप्त सर्वसमिकाएँ प्राप्त होती हैं। इसी प्रकार यदि (4.1) से (4.3) में $a_j = 1, J = 1, \ldots p$ तथा $b_j = 1, J = 1, \ldots q$ लेने पर I-फलन संगत ज्ञात H-फलन में परिणत हो जाता है और हमें इसके पूर्व राठी[7] द्वारा ज्ञात संगत सर्वसमिकाएँ प्राप्त होती हैं।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे० : **कम्पोजीतो मेथ०,** 1983, 15, 239-341

2. बुशमान, आर० जी० तथा श्रीवास्तव, एच० एम० : **जर्नल फीजिक्स** 1990, 23, 4707-4710

3. चौरसिया, वी० बी० एल० : **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका,** 1976, 19, 163-167

4. देवड़ा, एच० एम० तथा राठी, ए० के० : **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका,** 1993, 36 (2), 107-113

5. फॉक्स, सी० : **ट्रान्स० अमे० मैथ सोसा०,** 1961, 98, 359-429

6. इनायत हुसैन, ए० ए० : **जर्नल फीजिक्स** 1987, 20, 4119-4128

7. राठी, ए० के० : **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका,** 1981, 24, 77-79

8. राठी, ए० के० : **ली० मैथ०** (केटनिया), 1997, 52, 297-310

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 3, July, 1998.

राजस्थान में लोक-वानिकी

सतीश कुमार शर्मा

अरावली वृक्षारोपण परियोजना, झडोल (फ.), जिला उदयपुर (राज).

[प्राप्त-फरवरी 28, 1998]

सारांश

आज एथनोबॉटनी के क्षेत्र में काफी प्रगति हो रही है। लोक-वानिकी भी एथनोबॉटनी का एक भाग है जिसका विकास होना शेष है। इस पत्र में राजस्थान एवं आदिवासी लोगों द्वारा परम्परागत ढंग से वृक्षों को पनपाने की विधियों का विवेचन किया गया है।

Abstract

Folk-forestry in Rajasthan. *By* Satish Kumar Sharma, Aravalli Afforestation Project, Jhadol (F.), Dist. Udaipur (Raj),

Ethnobotany is a developing branch of science. Ethno-forestry or 'folk-forestry' can be considerd a part of Ethnobotany which is yet to be developed. In this paper, traditional ways of growing trees are discussed. Described methods are adopted by the rural and tribals of state of Rajasthan en mass to cater their domestic needs.

प्रस्तावना

प्राचीन समय में देश में भूमि के अनुपात में पशु एवं जनसंख्या कम थी अतः वनों पर जैविक दबाव कम था। वैसे भी वनों की सघनता एवं विपुलता काफी ज्यादा थी। जैसे-जैसे मनुष्य आबादी में विस्फोट होने लगा, भूमि का गैरवानिकी उपयोग बढ़ने लगा। परिणाम यह हुआ कि वन सिकुड़ते रहे और हम विद्यमान हालात तक अपने आपको ले आये।

पहले वन इतने अधिक थे कि हमें वन लगाने की जरूरत नहीं थी। लेकिन बाद में वन लगाने की जरूरत हुई और अनेकानेक योजनाओं का नाम ले कर वनारोपण प्रारम्भ हुआ। वन विज्ञान में भी अनेकानेक अनुसंधान हुए तथा वन प्रबंध उत्तरोत्तर अधिक वैज्ञानिक होता चला गया। लेकिन आधुनिक वन विज्ञान के प्रादुर्भाव से बहुत पहले ही हमारे समाज में वन रक्षण, वन रोपण, दोहन आदि की अपनी परम्परागत विधियों रही हैं। आज भी इस विधियों की झलक ग्रामीण परिवेश में देखने को मिल जाती है। वानिकी की ये परम्परागत विधियाँ ''लोक-वानिकी'' के नाम से जानी जा सकती हैं। हालांकि यह ''एथनोबॉटनी (Ethnobotany)'' की ही एक उपविधा है लेकिन इसे भी अस्तित्व में लाया जाना जरूरी है। देश के विभिन्न हिस्सों में प्रचलित लोक-वानिकी विधाओं को यदि प्रकाश में लाया जाये तो विपुल वानिकी साहित्य तैयार हो सकता है। प्रस्तुत पत्र में राजस्थान प्रान्त, विशेषकर राज्य के आदिवासी-बहुल-क्षेत्रों की लोक-वानिकी गतिविधियों पर प्रकाश डाला गया है।

पान्डे[2-4] द्वारा राजस्थान प्रान्त की परम्परागत वानिकी पर अच्छा प्रकाश डाला गया है। उन्होंने लोक-वानिकी के लिये ''एथनो-फोरेस्ट्री'' शब्द का उपयोग किया है। उन्होंने पवित्र कुंज (Sacred groves), पवित्र वृक्ष (Sacred trees), केशर छिड़क कर वृक्षों व वनों को बचाने की परम्परा, थोर की झाड़ियों में बीच बुवाई, बांस के राईजोमों का रोपण, शाखा रोपण, प्राकृतिक रूप से उगे पौधों की सुरक्षा आदि का विस्तार से वर्णन किया है। पर्वतों पर उगे वनों को ''अग्नि स्नान'' की परम्परावश जला देने की घटना का भी श्री पान्डे द्वारा विवरण दिया गया है। जोशी[1] एवं शर्मा[5-7] द्वारा राजस्थान में प्रचलित सजीव बाड़ों (Live fencing) एवं लोक वानिकी के अन्य पहलुओं का विवरण दिया गया है।

प्रस्तुत पत्र में राजस्थान की लोक-वानिकी के उन पहलुओं पर प्रकाश डाला गया है जो अभी तक भी अछूते हैं या जिन पर बहुत कम प्रकाश डाला गया है।

प्रयोगात्मक

अध्ययन क्षेत्र एवं उसकी पारिस्थितिकी

प्रस्तुत अध्ययन राजस्थान राज्य में 1980 से 1996 तक किया गया। राजस्थान का पश्चिमी भाग रेगिस्तानी है जहाँ खेजड़ी जैसे वृक्षों का असीम महत्व है। पूर्वी राजस्थान में खेती-बाड़ी काफी उन्नतशील है परन्तु यहाँ भी वृक्षों को उपयोगितानुसार लगाया-बचाया जाता है। यों तो पूरी अरावली तथा कोटा क्षेत्र की विंध्याचल पहाड़ियाँ वनों से आच्छादित हैं परन्तु दक्षिण राजस्थान वन-बहुल भू-भाग है जहाँ भील, भील मीणा, गरासिया कथोड़ी आदि जनजातियाँ निवास करती हैं। सहारिया कोटा संभाग में निवास करते हैं।

अध्ययन प्रक्रिया

लोक-वानिकी सम्बन्धी जानकारियाँ संग्रह करने के लिये दूर-दूर तक ग्रामीण क्षेत्रों में जा कर लोगों के घर, खेत, बाड़ों, घास बीड़ों आदि का अवलोकन किया तथा उनके द्वारा पौध लगाने, बचाने

के तरीकों की जानकारी की। विभिन्न धार्मिक, सांस्कृतिक पर्वों के समय पर प्रत्यक्षदर्शी बन कर लोक-वानिकी से जुड़ी चीजों का अध्ययन किया गया।

परिणाम एवं विवेचना

अध्ययन में संग्रहीत जानकारियों को, जिन पर अभी तक बहुत कम प्रकाश डाला गया है, यहाँ प्रस्तुत किया जा रहा है।

राजस्थान में परम्परागत वानिकी सम्बधी गतिविधियों को निम्नलिखित शीर्षकों में बाँटा जा सकता है:-

1. विस्तार-वानिकी सम्बधी गतिविधियाँ(Extension forestry activities)

2. रक्षण-वानिकी सम्बन्धी गतिविधियाँ (Protection forestry activities)

3. परिपालन गतिविधियाँ (Cultural activities)

विस्तार वानिकी

राजस्थान में विस्तार वानिकी के तरह-तरह के उदाहरण देखने को मिलते हैं।

1. बड़े गड्ढों में भूमितल के नीचे रोपण : प्रान्त के पूर्वी एवं मध्य भाग में अलवर, भरतपुर, जयपुर, अजमेर, सीकर, झुंझुन आदि जिलों के गाँवों के बाहर बरगद या पीपल लगाने की परम्परा है। इस कार्य हेतु लगभग 1 मीटर चौड़ा एवं एक मीटर गहरा गड्ढा खोदा जाता है तथा पौधों को इस तरह लगाया जाता है ताकि वह भूमि सतह से नीच ही रहे। ऐसा करने से गर्मियों में शुष्क हवाओं एवं लू के प्रकोप से छोटा पौधा बचा रहता है। गड्ढे में लगाये गये पौधों को चराई से बचाने के लिये गोलाकार ऊँची बाड दी जाती है। कई बार एक वृत्ताकार खाई खोद कर खाई की मिट्टी बाहर डाली जाती है तथा मिट्टी पर कांटेदार झाड़ियाँ काट कर गाड़ी जाती हैं। इस तकनीक से ही सम्भवतः बाद में आधुनिक वन विज्ञान ने 'रिंग पिट' (Ring Pit) तकनीक को सीखा।

पक्षियों द्वारा प्रकीर्णन करने से बरगद, पीपल भवनों में दरारों में उग आते हैं या उग कर दरार पैदा कर देते हैं। धार्मिक कारणों से इन पौधों को भवनों से उखाड़ कर फेंकना पाप समझा जाता है। अतः भवन की सुरक्षा करने के साथ-साथ वृक्ष हत्या के पाप से बचने के लिये भवनों से हटाये गये बरगद-पीपल को गाँव के बाहर रोपा जाता है। बरगद-पीपल का रोपण मानवीय आबादी क्षेत्र के अन्दर हीं किया जाता। प्रायः श्मशान को जाने वाले रास्ते में इनका रोपण किया जाता है ताकि अंतिम संस्कार हेतु किसी शव को ले जाते समय शव को वहां कुछ देर तक धार्मिक क्रिया हेतु रखा जा सके। बाद में पिण्डदान आदि की रस्में भी इन वृक्षों के नीचे की जाती हैं।

2. वृक्षदान : विद्यादान एवं कन्यादान जैसी चीजें प्रायः सभी ने सुनी हैं लेकिन वृक्षदान कम सुना शब्द है। दक्षिणी राजस्थान में कई जगह भील अपनी पुत्री को शादी कर विदा करने के समय महुए

(Madhuca indica) का नन्हा पौधा वर पक्ष को दान में देते हैं। वर पक्ष इसे अपने घर के पास रोपकर पालता है। आने वाले दिनों में यह पौधा वृक्ष बन कर वर पक्ष के परिवार की आमदनी का जरिया तो बनता ही है पति-पत्नी की सुखी एवं सुदीर्घ गृहस्थी की कामना के रूप में भी देखा जाता है।

3. **वन्य नवांकुर रोपण** (Wildling Planting) : महुये के बीज को दक्षिण राजस्थान में भील 'डोलमा' के नाम से जानते हैं। महुआ फलों के गर्मी में पकने पर फलाहारी बागलों (FlyingFoxes-Pteropus gigenticus) द्वारा रात को उनके छिलके खा लिये जाते हैं तथा साफ डोलमें नीचे फेंक दिये जाते हैं। इन डोलमों को आदिवासी सुबह इकट्ठा कर लेते हैं। जो कुछ बीज संग्रह होने से बच जाते हैं वे मानसून के शुरुआती एक दो वर्षों में उगने लग जाते हैं। इन नवाकुंरों की जैसे ही जड बाहर निकलती है, इस अवस्था में इन्हें संग्रहित कर उचित स्थानों पर लगाया जाता है। लगभग इसी तरह आम को भी बोया जाता है। भीलों का मत है कि नवांकुरों की जड़ भूमि में जाने पर उन्हें उखाड़ने से जड़ों को नुकसान पहुँचता है जिससे पौधा ठीक से नहीं जम पाता है। अतः वे बीजों से जड़ को बाहर झांकते ही रोपण का कार्य कर देते हैं।

4. **शाखा कटिंग रोपण** (Branch cutting) : दक्षिण राजस्थान में भीलों में शादी के समय वर पक्ष के लोग वन में जाते हैं तथा सालर के वृक्ष के तने पर लाल वस्त्र भूमि से 1.5 मी० ऊपर बाँध कर वृक्ष पूजा करते हैं। तत्पश्चात् वृक्ष पर चढ़ कर चार शाखाएं काटी जाती हैं जिनको घर के अहाते में "धम्ब रोपण" परिपाटी के तहत रोपा जाता है। इन चारों डण्डों को शादी के बाद यथास्थिति रखा जाता है। यदि चारों में फुटान हो जाये तो नव दम्पत्ति की गृहस्थी में सर्वानन्द होने का अनुमान लगाया जाता है। कम से कम एक में भी फुटान हो जाये तो भी शुभकारी ही माना जाता है। यदि कोई भी डण्डा फुटान न करे तो अपशकुन माना जाता है। फुटान किये डण्डे को वृक्ष बनने दिया जाता है तथा उनका सम्मानपूर्वक हमेशा रक्षण किया जाता है। भीलों के घरों के आस-पास सालर की उपस्थिति किसी न किसी के दाम्पत्य जीवन की शुरुआत की निशानी होती है।

सैंदडा *(Delonix alata)*, पाकर *(Ficus lacor)*, शहतूत *(Morus alba)*, रतनजोत *(Jatropha Curcas)*, थूर *(Euphorbia nerifolia)* आदि की बड़ी शाखा कटिंग के रोपण से उगाये जाते हैं। सैदंडा, पाकर, शहतूत की कटिंग दोनों ध्रुवों पर कटी होने पर भी सफल हो जाती है लेकिन थूर एवं रतनजोत एक ध्रुव पर ही कटिंग की होती है तथा कटा हिस्सा भूमि में लगभग 30 सेमी० गहरा गाड़ा जाता है।

कटिंग लगाने से सम्बन्धित कुछ तथ्य सारणी 1 में दिये गये हैं ।

घरों के अहाते की बाड पर प्रायः सेम, लौकी, तोरई आदि की बेलें चढ़ा दी जाती हैं। पाकर की कटिंग लगभग 2 से 3 मीटर लम्बी तथा 4 से 10 सेमी. मोटी रोपित कर जाती है। सैंदडा की कटिंग एक से डेढ़ मीटर लम्बी तथा 3 से 5 सेमी. मोटी रोपित की जाती है।

सारणी 1

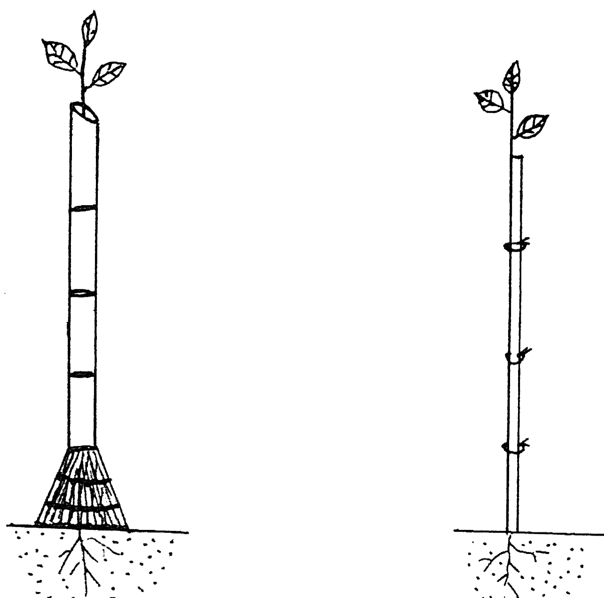
कटिंग सम्बन्धी अन्य जानकारी

नाम	कटिंग रोपण का		
प्रजाति	समय	उद्देश्य	स्थल
थूर	गर्मी	बाड	खेत व घास बीड की मेड
पाकर	जून-जुलाई	बाड	मंदिर, देवरों के अहाते, खेत की बाड, नालों के किनारे, कुओं के पास,
रतनजोत	गर्मी	बाड, तैल बीड	घरों का अहाता, खेत की मेड
सालर	शादी विवाह के समय	शगुन विचार	घर के अहाते में विवाह के समय
सैंदडा	जून-जुलाई	बाड, ईंधन व घास संग्राहक निर्माण	घर का अहाता
शहतूत	जून-जुलाई	फल प्राप्त करने हेतु	घरों का अहाता, कुएँ के पास, खेत की मेड

5. मूल कटिंग रोपण (Planting of root cuttings) : अलवर, भरतपुर, जयपुर आदि जिलों में वर्षा ऋतु में शीशम (Dalbergia sissoo) की जड़ों से निकली फुटान (Root suckers) को खोद कर किसान कुओं पर एवं घरों के अहाते में छाया हेतु वृक्ष पनपाने के लिये लगाते हैं।

6. घास रोपण : दक्षिण राजस्थान में खस-खस *(Vetivera zizanioides)* नामक घास को वर्षा ऋतु में तालाबों में से खोद कर उनके पत्तों को काट कर फेंक दिया जाता है तथा जड़ वाले हिस्से को खेतों की मेड पर रोपित करते हैं। कुछ समय बाद घास के पूरे जमने पर बार-बार पानी द्वारा मेड के टूटने की समस्या पर काबू पा लिया जाता है। इस तरह रोपित खस से झाडू बनाने हेतु पुष्प-गुच्छ भी मिल जाते हैं। पूर्वी राजस्थान में वर्षा में खेतों के चारों तरफ मिट्टी का डोला बाँधकर मूंज *(Saccharum munja)* के पूरे को खोद कर घास स्लिप (Grass slips) का रोपण किया जाता है। मूंज से मूढ़े बनाने हेतु सरकंडे, छप्पर बनाने हेतु सामग्री (Thaching material) मिलती है। अकाल के समय पत्तों को चारे के रूप में काम में लाते हैं। इसी तरह दक्षिणी राजस्थान में मूंज की ही एक प्रजाति, जिसे स्थनीय भाषा में 'सरजाल' कहा जाता है, भीलों द्वारा पानी के धोरों के पास लगाई जाती है। इससे तीर बनाने के सरकंडे मिलते हैं। दक्षिणी राजस्थान में वर्षा ऋतु में प्रारम्भ में वन क्षेत्र से प्राकृतिक बांस के थूरों की खुदाई कर राईजोम सहित बांस उखाड़े जाते हैं। वायवीय आधा बांस काट लिया जाता है तथा राईजोम का रोपण किया जाता है। जमने के बात राईजोम से नये कल्ले फूटते हैं तथा अगले कुछ साल में बांस का पूरा बन जाता है।

7. बीजारोपण : प्रायः ग्रामीण क्षेत्रों में बीजारोपण के बजाय वर्षा में कहीं उगा हुआ पौधा मिल जाये तो उसके आस-पास मिट्टी का गोल पिंड रखते हुए खुदाई की जाती है तथा ऐसे पौधों का उपयुक्त जगह पर रोपण किया जाता है। इसी विधि से घरों के पास नीम उगाया जाता है। दक्षिणी राजस्थान में आम के बीज की बुवाई बडे ही रोचक ढंग से की जाती है। खेत में बीज बोनें के काम लिया जाने वाले बांस का बना "ओरना" जो एक तरफ से कीपाकार होता है तथा दूसरी तरफ नाली-नुमा होता है उसे आम के बोये बीज पर उल्टा ढक देते हैं। बीज उगने पर प्रांकुर सूर्य की रोशनी की तलाश में तेजी से ऊपर की तरफ बढ़ता है। इटियोलेशन के कारण पौधा असामान्य लम्बाई प्राप्त कर लेता है। जैसे ही वह ओरने की नली से बाहर निकलता है, ओरना धीरे-धीरे ऊपर खींचते हुए हटा लिया जाता है तथा पौधे के पास एक डंडा गाड कर उसे सहारा दिया जाता है। इस प्रकार प्रथम वर्ष में ही पौधा अच्छी लम्बाई प्राप्त कर लेता है (चित्र-1)।



चित्र 1 - ओरना के उपयोग से लम्बा बीज़ांकुर प्राप्त करने की विधि।

8. जीवित खम्बा रोपण (Live pole planting) : यह विधि दक्षिणी राजस्थान में उदयपुर जिले के कानोड क्षेत्र में, जहाँ पान की खेती होती है, काम में लाई जाती है। इस विधि का आविष्कार स्थानीय पान कृषकों (Beetle leaves farmers) ने किया है। पान की खेती के लिये एक बहुत बड़ी छप्परनुमा छायादार रचना बनानी पड़ती है जिसे "पनवाडी" कहा जाता है। पनवाडी को खड़ा करने के लिये गाड़े जाने वाले खम्बे कुछ सालों बाद सड-गल जाते हैं। अतः बार-बार नये खम्बे बदलने पड़ते हैं। स्थानीय पनवाडियों ने इस समस्या का हल "जीवित खम्बा रोपण" तकनीक से दूर किया। इस विधि से जहाँ नई पनवाडी तैयार करनी होती है वहां कुछ दिन सिंचाई बंद कर जमीन में शुष्कता

ला कर भविष्य में खम्बे की आवश्यकता वाले बिन्दुओं पर गहरे गड्ढे खोदे जाते हैं तथा उनमें सालर (Boswellia serrata) की बहुत लम्बी (2 से 4 मीटर) तथा 15 से 20 सेमी० मोटी शाखाओं का रोपण किया जाता है। यदि शाखायें ऊपरी छोर पर दुफंकी या तिफंकी हों तो ज्यादा पसंद की जाती हैं ताकि छप्पर की क्षैतिज टेक इन पर रखी जा सके। रोपित खम्बे शीघ्र जड़ पकड लेते हैं तथा स्थाई खम्बों के रूप में हमेशा उपलब्ध रहते हैं। बाद में पनवाडी में सिंचाई की वजह से सालर को भी नमी मिलती है जिससे इसमें पतझड भी कम होता है तथा "खम्बे वृक्ष" पान पर छाया डालकर कृषक की एक अतिरिक्त माँग भी पूरी करने में मदद देते हैं।

रक्षण वानिकी सम्बन्धी कार्य

1.पर्ण फडान क्रिया : दक्षिण राजस्थान में नालों के किनारे खजूर के झुंड बहुतायत से मिलते हैं। प्रायः नवम्बर से दिसम्बर तक खजूरों के छत्रों की छंगाई कर झाडू एवं पंखा उद्योग हेतु पत्तियों का दोहन भारी पैमाने पर किया जाता है। चोरी-छिपे भी दोहन होता है। लोग छोटे पौधों तक की पत्तियाँ काट लेते हैं जिससे पौधे की वृद्धि पर विपरीत प्रभाव पड़ता है। छोटे पौधों की सुरक्षा हेतु किसान उनकी पत्तियों के पर्णअक्षों को बीचोबीच फाड कर लगभग सभी पत्तियों को दो भागों में बाँट कर पौधे में यथास्थान लगी छोड़ देते हैं। ऐसी पत्तियाँ झाडू निर्माण हेतु अनुपयोगी होने से कटने से बच जाती हैं परन्तु पौधे में लगी होने के कारण वे प्रकाश-संश्लेषण कर पौधे को पोषण देती रहती है।

2. रिंग पिट(Ring Pit) : इस विधि में प्रायः बरगद-पीपल लगाये जाते हैं। यह विधि पूर्वी राजस्थान में काम में ली जाती है। जिस गड्ढे में वृक्ष लगाया जाता है उसके चारों तरफ लगभग 3-4 मीटर त्रिज्या की एक वृत्ताकार खाई (Ring ditch) खोद कर उसकी मिट्टी बाहर की तरफ डोले के रूप में डाल दी जाती है। डोले पर कांटेदार झाड़ी गाड कर बाड की जाती है।

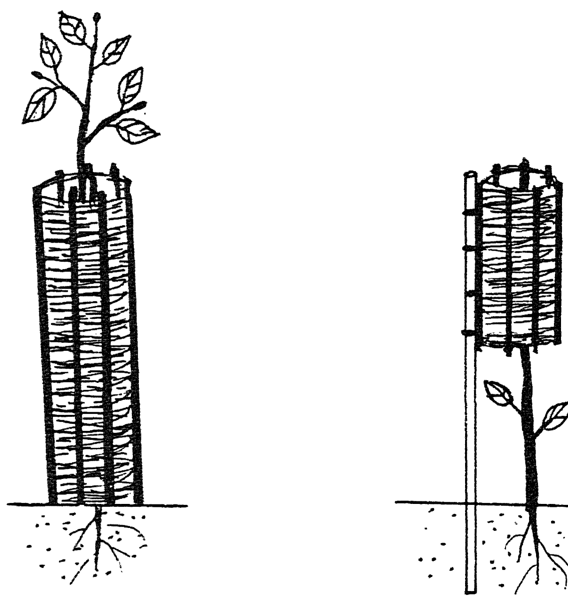
3. थूर वृत्त : महुआ, आम आदि पौधों की सुरक्षा हेतु दक्षिण राजस्थान में एक बडे घेरे के रूप में थूर रोपित की जाती है।

4. ट्री-गार्ड : वृक्षों की सुरक्षा हेतु विभिन्न आकार के ट्री-गार्ड बना कर लगाने का रिवाज़ दक्षिण राजस्थान में प्रचलित है। कुछ किस्में निम्न हैं:-

(अ) पत्थर के ट्री गार्ड : गोगुन्दा क्षेत्र में पत्थर की लम्बी तीन या चार पट्टियों को तिकोने या चोकोर बाक्स के रूप में पौधे को धेर कर खड़ा किया जाता है। पौधा बड़ा होने पर पट्टियाँ हटा ली जाती है।

(अ) खजूर के पत्तों का ट्री-गार्ड :खजूर के हरे पत्ते काट कर उन्हें किसी पत्थर आदि के नीचे दबा कर सुखा लिया जाता है। दबाब देने से वे एकदम प्रेस किये वस्त्र की तरह व्यवस्थित हो जाते हैं। इन पत्रों के पर्णअक्ष जमीन में गाड कर रोपित पौधे के चारों तरफ सुरक्षात्मक घेरा तैयार किया जाता है।

(स) बाँस के ट्रीगार्ड : हरे बाँस को बीचो-बीच फाड कर या उनकी पतली फाड़ें बना कर बुनाई द्वारा गोलाकार ट्रीगार्ड बनाये जाते हैं जिन्हें 'करेला' कहते हैं। करेले दो तरह के होते हैं—सँकरे एवं चौड़े। सँकरे करेलों का व्यास 15-30 सेमी० तक होता है जब कि चौड़े करेलों का व्यास 30-50 सेमी० तक होता है। करेले पुनः दो ढंग से लगाये जाते हैं- भूमि पर टिका कर तथा बांस के गड़े डंडों पर बाँध कर। भूमि पर टिका कर लगाये जाने वाले करेलों की ऊंचाई प्राय 1 मी. से अधिक होती है। इन्हें पौधों को पहना कर पत्थर आदि के सहारे एक बार भूमि पर खड़ा कर दिया जाता है तथा पौधों के बड़ा होने पर ये जहाँ के तहाँ गल जाते हैं। डंडों पर लगाये जाने वाले करेले लम्बाई में 1 मी. से कम होते हैं। इन्हें जमीन में गडे 3 बांसों पर इस तरह बाँधा जाता है कि ये जमीन से ऊपर उठे रहते हैं। ज्यों-ज्यों पौधा बड़ा होता है, उत्तरोत्तर लम्बे बांस गाड कर करेले को क्रमशः उठाया जाता रहता है। करेले को इस तरह स्थापित किया जाता है कि पौधे का शीर्ष करेले के अन्दर रहे। पौधा बड़ा होने पर डंडेदार करेले दूसरी जगह भी काम में ले लिये जाते हैं। कई बार ये करेले तीन की बजाय एक बाँस के सहारे भी लटकाये जाते हैं। (चित्र 2)।

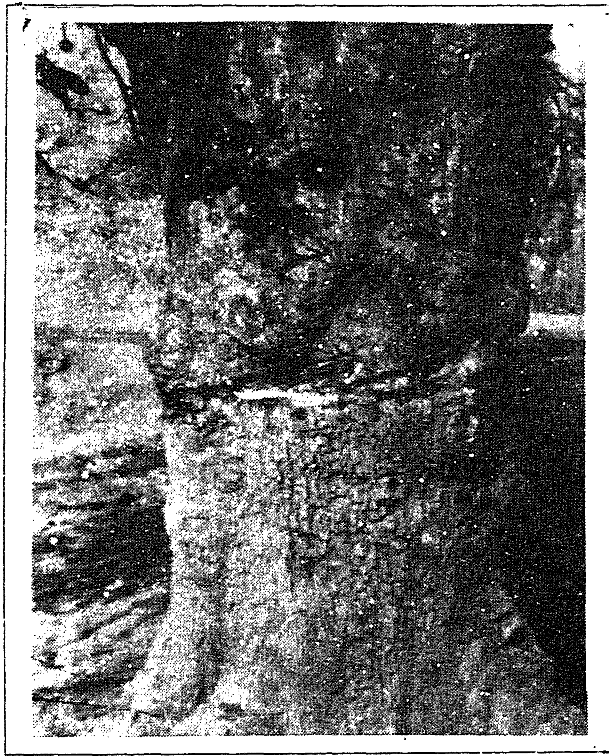


चित्र 2 - भूमि पर टिका हुआ तथा बांस के एक डण्डे के सहारे खडा करेला।

परिपालन गतिविधियाँ

स्थानीय पौधों की अधिक बढ़वार या अधिक पैदावार लेले या वृक्षों की फसल में सुधार हेतु अनेक परिपालन गतिविधियाँ प्रचलन में हैं। कुछ निम्न हैं :-

1.घाघरी पहनाना : यह विधि महुवा वृक्षों से अधिक उपज लेने हेतु काम में ली जाती है। इस विधि में वयस्क मनुष्य की वक्ष ऊंचाई से नीचे-नीचे तेज कुल्हाडी से महुआ वृक्षों के तने पर चारों ओर लगभग 1 सेमी. गहरी खाई सी बनाते हैं। स्थानीय भाषा में इसे घाघरी पहनाना कहते हैं। लोगों का कहना है कि इससे वृक्षों में शीघ्र व ज्यादा फूल एवं फल लगते हैं। एक वृक्ष के जीवन काल में उसे कई बार घाघरी पहनाई जाती है। कभी-कभी आम को भी घाघरी पहनाई जाती है (चित्र 3)।



चित्र 3 : महुवे के तने पर बनाई गई घाघरी।

2. सूखी पत्तियों को जलाना : युवा खजूरों के तनों पर स्थाई पर्णाधार लगे रहते हैं जिससे फल तोडने हेतु उन पर चढ़ना कठिन कार्य होता है। ऐसे वृक्षों पर चढ़ना आसान बनाने के लिये किसान सूखे पर्णाधारों में गर्मी के मौसम में आग लगा कर तने को बाधारहित कर लेते हैं। इससे न केवल वृक्षों पर चढ़ना आसान हो जाता है बल्कि खेती के लिये नाशक गिलहरियों को भी छुपने व घोंसला बनाने की जगह नहीं मिल पाती है। आग की चपेट में आ कर बया पक्षियों के घोंसले भी नष्ट हो जाते हैं [शर्मा [6]] । युवा खजूरों की पत्तियों को समय-समय पर काट कर किसान लोग आस-पास सफाई भी कर देते हैं ताकि खेती को नुकसान पहुँचाने वाले चूहे कम से कम संख्या में पनपें।

3. पोलार्डिंग : दक्षिण राजस्थान में यह विधि सैंदडा *(Delonix alata)* के वृक्ष पर प्रयोग की जाती है। इस विधि में कुछ सालों के अन्तराल में सैंदडा वृक्षों को भूमि से लगभग 2.5-3.5 मी. ऊँचाई पर काट दिया जाता है। इससे पौधे की ऊँचाई बढ़ना बंद हो जाती है तथा पार्श्व फुटान होने लगता है। इस विधि से घरेलू खपत हेतु ईंधन मिलता है साथ ही छत्रक छाताकार हो जाने से उस पर सूखा घास संग्रह किया जाता है। वृक्षों पर संग्रह घास, नमी, दीमक, चूहों व पशुओं से बची रहती है साथ ही सांपों के घास में छुपने से भी निजात मिल जाती है।

3. छँगाई : बेर तथा खेजडी की प्रायः सर्दियों में छँगाई की जाती है तथा कटी टहनियों को सुखा कर पत्तों को झाड लिया जाता है। सूखे पत्तों को "पाला" कहते हैं जो चारे के रूप में काम में आते हैं। टहनियाँ ईधन के रूप में काम आती हैं। कई जगह छँगाई में एक या दो बडी शीर्ष टहनियों (Leader shoot) को यथावत रखा जाता है। इससे न केवल वृक्ष की ऊँचाई बढ़ती है बल्कि उसके जीवन हेतु प्रकाश-संश्लेषण भी कुछ न कुछ चलता रहता है।

4. सम्बंध सूचक वृक्षों (Totem) की सुरक्षा : विभिन्न गोत्रों के आदिवासी अपनी उत्पत्ति या सान्निध्य अनेकों प्राकृतिक वस्तुओं जैसे वनस्पति, प्राणी आदि से मानते हैं तथा उन्हें सगोत्री जैसा मान कर उनका रक्षण करते हैं। दक्षिण राजस्थान के निवासी भीलों में अनेक गोत्र (Clans) होते हैं। अलग-अलग गोत्र के लोग अपनी उत्पत्ति या जुडाव अलग-अलग वनस्पति से मानते हैं जिन्हें इस गोत्र का टोटेम कहा जाता है। सम्बंधित लोग अपनी टोटेम वनस्पति को नष्ट नहीं करते हैं वरन उसका रक्षण करते हैं। कुछ उदाहरण सारणी 2 में अंकित हैं।

सारणी 2

राजस्थान के भीलों की कुछ टोटेम वनस्पतियाँ

भीलों के गोत्र (Clans)	टोटेम वनस्पति	वनस्पति की प्रकृति
आमलियार	अफीम	शाक, कृषि फसल
भगोरा तथा पलासिया	पलाश	वृक्ष, वन्य
डिण्डोर	मरोडफली	झाडी, वन्य
गमार	हवन, सवन	वृक्ष, वन्य
निनामा	पीपल	वृक्ष, वन्य/रोपित
पारगी तथा वडेरा	नीम	वृक्ष, वन्य/रोपित

राजस्थान में अनेक गाँवों एवं शहरों के नाम वनस्पतियों पर आधारित हैं। यहाँ तक कि मनुष्यों के नाम तक भी वनस्पतियों पर आधारित हैं। जगह-जगह भूमि चिन्हों के नाम भी पेड-पौधों के नामों पर आधारित होते हैं। यह सब पौधों के प्रति सम्मान का द्योतक है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० प्रभाकर जोशी, डॉ० सीताराम खण्डेलवाल, श्री योगेश श्रीवास्तव, श्री ए० सी० चौबे, श्री वाई० के० दक, श्री डी० एन० पाण्डे, श्री कुमार स्वामी गुप्ता, श्री बृजपाल सिंह का बहुत

आभारी है जिनकी प्रेरणा एवं सहयोग से उक्त अध्ययन सम्पन्न हो सका। लेखक उदयपुर, बांसवाडा, डूंगरपुर, सिरोही, चित्तौडगढ़, राजसमंद, सिरोही जिले के आदिवासियों एवं झाडोल तहसील की वन सुरक्षा समितियों का आभारी है जिनके सहयोग के बिना यह अध्ययन पूर्ण होना संभव नहीं था।

निर्देश

1. जोशी, पी० : **एथनोबॉटनी ऑफ प्रिमिटव ट्राईब्स आफ राजस्थान** (1995)

2. पान्डे, डी० एन० : **बियोन्ड वेनिशिंग वुड्स**, हिमांशु पब्लीकेशन, उदयपुर एवं दिल्ली (1996)

3. पान्डे, डी० एन०, *एथनोफोरेस्ट्री,* हिमांशु पब्लीकेशन, उदयपुर एवं दिल्ली (1998)

4. पान्डे, डी० एन०, साझा संसाधन प्रबंध, हिमांशु पब्लीकेशन, उदयपुर एवं दिल्ली (1998)

5. शर्मा, सतीश कुमार : हनी बी, 1996, 7-3:11

6. शर्मा, सतीश कुमार : जे० बी० एन० एच० एस० 1997, 94-3-:515-20

7. शर्मा, सतीश कुमार : लोक प्राणी विज्ञान, हिमांशु पब्लीकेशन, उदयपुर एवं दिल्ली (1998)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 3, July, 1998.

कतिपय म्यूटाजेनी रसायनों की उपस्थिति में निमज्जित किण्वन द्वारा लैक्टिक अम्ल का उत्पादन

एस० पी० सिंह, शशिकान्त कुमार, विनय कुमार
तथा
बी० पी० पाण्डेय

रसायन विभाग, मगध विश्वविद्यालय, बोधगया (बिहार)

[प्राप्त - अप्रैल 8, 1998]

सारांश

लैक्टिक अम्ल के उत्पादन पर कतिपय रासायनिक म्यूटाजेनों का प्रभाव ज्ञात करने के लिए लैक्टोबैसिलस डेलब्रुकाइ के निमज्जित संवर्ध पर अधययन किया गया। देखा गया कि डाइमेथिल सल्फेट तथा हाईड्रैजोबेंजीन से लैक्टिक अम्ल बढ़ा किन्तु ऐसीटोन हाईड्रैजोन तथा β-क्लोरोएथिलैमीन से लैक्टिक अम्ल में यथेष्ठ ह्रास हुआ।

Abstract

Production of lactic acid by submerged fermentation exposed to some mutagenic chemicals. *By* S. P. Singh, Shashikant Kumar, Vinay Kumar and B. P. Pandey, Department of Chemistry, Magadh University, Bodh-Gaya-824 234.

Studies were conducted on submerged culture of Lactobacillus delbruckii to determine the influence of some chemical mutagens on lactic acid production. It has been found that dimetbyl sulphate and hydrazobenzene caused an increase in lactic acid level, while acetone hydrazone and β-chloro ethylamine produced marked and sustained reduction in the yield of lactic acid by *L. delbruck ii.*

सूक्ष्मजीवों के उत्पादन में सुधार लाने के लिए म्यूटाजेनों (mutagens) का प्रयोग अच्छी तरह स्थापित नहीं हो पाया है। समीक्षाओं से पता चलता है [1-7] कि विभेदों (Strains) के उत्पादन में सुधार लाने के लिए सर्वोत्तम रणनीति अपनाये जाने पर व्यापक सहमति है और इन सबों में म्यूटाजेनों के उपयोग की संस्तुति की गई है।

हमारी प्रयोगशाला में विभिन्न सूक्ष्मजीवी विभेदों के सुधार हेतु अनेक हाइड्रैजीन व्युत्पन्नों तथा कतिपय अन्य रासायनिक म्यूटाजेनों का उपयोग काफी समय से होता आ रहा है [8-19]। अन्य अन्वेषकों ने भी[20 - 28] दूसरे अनेक रासायनिक म्यूटाजेनों का प्रयोग किया है। इस प्रपत्र मे हम ऐसे विविध म्यूटाजेनी उपचारों का वर्णन करेंगे जिनसे गुणात्मक प्रभाव पाये गये हैं।

प्रयोगात्मक

सामग्री तथा विधियाँ

हमने इनाकुलम उत्पादन हेतु 45° से० पर 48 घण्टे तक एक माध्यम में लैक्टिक अम्ल उत्पादक लैक्टोबैसिलस डेलब्रुकाइ के विभेद को पल्लवित किया।

उत्पादन माध्यम निम्नवत् था—शीरा (20% भार/आयतन), माल्ट निष्कर्ष (0.38%), $(NH_4)_2HPO_4$ (0.25%), $CaCO_3$ (60%), आसुत जल में विघटित करके 100 मिली० आयतन बना लिया गया और इसका पी-एच 6.2 कर लिया गया।

रासायनिक म्यूटाजेनों की सान्द्रता 1.0×10^{-5} M से लेकर 10×10^{-5} M के मध्य रखी गई।

उत्पादन माध्यम को 15 पौंड भाप दाब पर 30 मिनट तक निर्जर्मित किया गया।

0.05 मिली० इनाकुलम जिसमें *लै० डेलब्रुकाइ* था, पलिघों में स्थानान्तरित किया गया जिनमें उपर्युक्त उत्पादन माध्यम था। इनाकुलेशन के बाद 48 घंटे तक संवर्ध माध्यम में इनाकुलम में रहने दिया गया। इनक्युबेशन अवधि इनाकुलेशन के बाद 72, 144 तथा 192 घंटे तक रखी गई। पी-एच को फास्फेट-बफर विलयन द्वारा 6.2 पर लाया गया। ताप 45°C रखा गया।

परीक्षण विधियाँ

किण्वित मैश (mash) को सान्द्र सल्फ्यूरिक अम्ल से उपचारित करके मुक्त लैक्टिक अम्ल बार्कर तथा सुमर्सन[30] विधि से परिमापित किया गया। जो शर्करा बची रह गई उसकी मात्रा डुबॉय इत्यादि की विधि[31] से ज्ञात की गई। यह निर्धारण 72, 144 तथा 192 घंटे की इनक्यूबेशन अवधि के बाद किया गया। अधिकतम उपलब्धि को सारणी 1 में अंकित किया गया है।

सारणी 1

लै० डेलब्रुकाइ द्वारा लैक्टिक अम्ल उत्पादन पर रासायनिक म्यूटाजेनों का प्रभाव

म्यूटाजेन	M/100 विलयन में म्यूटाजेनों की अधिकतम प्रयुक्त सान्द्रता	लैक्टिक अम्ल की अधिकतम उपलब्धि gm/100ml (कन्ट्रोल)	म्यूटाजेनों की उपस्थिति में लैक्टिक अम्ल की अधिकतम उपलब्धि gm/100ml	अवशिष्ट शर्करा	144 घंटे बाद% वृद्धि gm/100ml (+)
डाइमेथिल सल्फेट	4×10^{-5}M	5.990	6.580	0.445	9.85
हाइड्रैजोबेंजीन	5×10^{-5}M	6.002	6.482	0.518	7.99
ऐसीटोहाइड्रैजोन	2×10^{-5}M	6.116	6.132	0.883	0.26
β-क्लोरो एथिलएमीन	2×10^{-5}M	6.130	6.160	0.898	0.49

टिप्पणी = सारे आंकडे तीन प्रयोगों के औसत मान हैं।
+ धनात्मक वृद्धि का सूचक, प्रयोगात्मक विचलन ± 2.5 - 3%

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 से पता चलता है कि विभिन्न म्यूटाजेनों का लै० डेलब्रुकाइ तथा लैक्टिक आम्ल उत्पादन पर विशिष्ट प्रभाव पड़ता है, इनमें से डाइमेथिल सल्फेट तथा हाइडैजोबेंजीन से ही उल्लेखनीय वृद्धि परिलक्षित होती है। 4×10^{-5}M सान्द्रता पर डाइमेथिल सल्फेट से लैक्टिक अम्ल की अधिकतम प्राप्ति हुई जो कन्ट्रोल की तुलना में 9.85% अधिक है। सिंह इत्यादि[13] ने पूर्ववर्ती अध्ययन में एथिलमेथेन सल्फोनेट को लै० डेलब्रुकाइ तथा लैक्टिक अम्ल उत्पादन के लिए प्रवर्धक के रूप में पाया था। यह डाइमेथिलसल्फेट की अपेक्षा उत्तम म्यूटाजेन था क्योंकि इससे कन्ट्रोल की तुलना में 26.5% अधिक लैक्टिक अम्ल बना था।

यद्यपि हाइड्रैजीन तथा इसके कुछ व्युत्पन्न [8-9] सूक्ष्मजीवी किण्वन के लिए बाधक पाये गये है और कुछ उत्तेजक[16, 17] किन्तु डाइड्रैजोबेंजीन को इस प्रयोग में लाभदायक पाया गया। इसकी सान्द्रता $5 \times 10^{-5} M$ से अधिक होने पर इसका यह प्रभाव जाता रहता है।

ऐसीटोन हाइड्रैजोन की भी उच्च सान्द्रताएँ किण्वन में क्षति पहुँचाती है। β-क्लोरोएथिलऐ मीन का भी प्रभाव नगण्य रहा। सिंह इत्यादि[9] के पूर्ववर्ती अध्ययन में हाइड्राक्सिल ऐमीन तथा मेथिल हाइड्राक्सिलऐमीन को अन्यन्त विशिष्ट म्यूटाजेन के रूप में पाया था। इस तरह β-क्लोरोएथिल ऐमीन

तथा मेथिल हाइड्राक्सिल ऐमीन दोनों ही लैक्टोबैसिलाइ के प्रति समान व्यवहार करते हैं और उच्च सान्द्रता पर बाधक हो सकते हैं।

निर्देश

1. अलिखानियन, एस० आई० : Adv. Appl. Microbiol, 1962, 4, 1.
2. अलिखानियन, एस० आई० : Yugoslav Academy of Sciences & Arts, Zagreb, 1969, पृष्ठ 69
3. ब्रैडले, एस० जी० : Adv. Appl. Microbiol, 1966, 8, 29.
4. कै लम, सी० टी० : Progr. Ind. Microbiol, 1964, 5, 1.
5. कैलम, सी० टी० "Methods in Microbiology" (Norris, J.R. and Ribbons, N.W, eds) 1970, Vol.3 A, अध्याय VII, पृष्ठ 435 अकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क
6. डेवीस, ओ० एल० : Biometrics, 1964, 20, 576.
7. सेरमोन्टी जी० : Genteics of Antibiotic Producting Micro-orginisms, 1969, विले इंटरसाइंस, लन्दन
8. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Indian J. Agric. Chem. 1988, 21, 48.
9. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Mendel. 1990, 7, 345.
10. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Bio-Journal. 1992, 4, 245.
11. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Indian J. Agric. Chem. 1993, 26, 107.
12. सिंह, एस० पी० : Columbian. Journ. Life. Sci. 1993, 1, 31.
13. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Indian. J. Agric. Chem. 1993, 26, 141.
14. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Asian. J. Chem. 1994, 6, 753.
15. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Asian. J. Pure & Applied Chem. 1993, 1, 125.
16. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Asian. J. Chem. 1997, 9, 157.
17. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Asian. J. Chem. 1997, 9, 886.
18. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Asian. J. Chem. 1998, 10, 220.
19. सिंह, एस० पी० इत्यादि : Asian J. Chem. 1998, 10, 250.
20. सिंह, एस० पी० तथा तिवारी के० पी० : Zbl Bakt II Abst. 1980, 135, 328.
21. सिंह, एस० पी० तथा रॉय, एस० के० : Acta Botanica Indica, 1984, 12, 105.

22. महना, एस० के० : Indian J. Eptl. Bio. 1984, 22, 228.

23. थामस, आर० : Folia Microbiol, 1971, 16, 197.

24. सुंग, जेड० आर० : Genetics, 1979, 84, 51.

25. टोर्समोटो, एस० इत्यादि : Mutat. Res. 1979, 56, 121.

26. निशि, ए० इत्यादि : Phytochem, 1974, 11, 1653.

27. फ्रीज, ई० : Radiation. Res. Suppl. 1996, 6, 97.

28. ओर्गेल एल० ई० : Adv. Enzymol, 1965, 27, 289.

29. विटकिन, ई० एम० : Annual Rev. Microbiol, 1969, 23, 487.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 3, July, 1998.

धमनी दीवाल का क्षेत्र

केशव कुमार

एनाटमी विभाग, चिकित्सा विज्ञान संस्थान,
काशी हिन्दू विश्व विद्यालय, वाराणसी,

[प्राप्त–अक्टूबर 31, 1995]

सारांश

मृत्यूपरान्त 300 ऐसे प्रौढ़ व्यक्तियों के जो किसी भी प्रकार की हृदय अथवा धमनियों की बीमारी से पीड़ित नहीं थे, एसेंडिंग एओर्टा, पल्मोनरी ट्रंक तथा फीमोरल आर्टरी के 10 मिमी० लम्बे धमनी प्रखण्ड उनके उद्भव के समीप से प्राप्त किये गये। प्रत्येक धमनी प्रखण्ड की दीवाल की लम्बाई में काटते हुये धमनी गुहा को खोलकर गुहा की परिधि तथा दीवाल की मोटाई मापी गयी।

एसेंडिंग एओर्टा की दीवाल की मध्यमान मोटाई 1.5 मिर्मी० थी जबकि पल्मोनरी ट्रंक तथा फीमोरल आर्टरी में यह 0.5 मिमी० थी। फीमोरल आर्टरी की गुहा की मध्यमान परिधि 15 मिमी० थी जबकि एसेंडिंग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक में 60 मिमी० थी। इस तरह से एक पल्मोनरी ट्रंक के प्रखण्ड की दीवाल का क्षेत्र चार फीमोरल आर्टरी के प्रखण्डों की दीवाल के क्षेत्र से समानता रखता था और एक एसेंडिंग एओर्टा के प्रखण्ड की दीवाल का क्षेत्र तीन पल्मोनरी ट्रंक के प्रखण्डों की दीवाल के क्षेत्र के बराबर था। आन्तरिक पर्त्त की लहरदार बनावट के कारण प्रत्येक धमनी प्रखण्ड की गुहा की परिधि की माप उसकी वाह्य परिधि की माप के बराबर थी।

यह निष्कर्ष निकाला गया कि किसी धमनी प्रखण्ड का क्षेत्र उसकी लम्बाई, दीवाल की मोटाई तथा गुहा की परिधि के परस्पर गुणनफल के बराबर होता है। समान लम्बाई तथा समान दीवाल की मोटाई वाले किन्हीं दो धमनी प्रखण्डों की दीवाल के क्षेत्रों का अनुपात उन धमनी प्रखण्डों की गुहा की परिधियों के अनुपात के बराबर होता हैं। समान लम्बाई तथा समान गुहा की परिधि वाले किन्हीं दो धमनी प्रखण्डों की दीवाल के क्षेत्रों का अनुपात उन धमनी प्रखण्डों की मोटाइयों के अनुपात के बराबर होता है।

Abstract

Area of Arterial wall. *By* Keshaw Kumar, Department of Anatomy, Institute of Medical Sciences, Banaras Hindu University, Varanasi 221 005.

During autopsy 10 mm long arterial segments were obtained from ascending aorta pulmonary trunk and femoral artery immediately distal to their commencements from 300 human adults not suffering from any cardiovascular disease. Lumen of each arterial segment ws opened by cutting its wall longitudinally to measure lumen circumference and wall thickness.

Mean wall thickness of ascending aorta was 1.5 mm while in case of pulmonary trunk and femoral artery it was 0.5 mm. Mean lumen circumference of femoral artery was 15 m while in case ascending aorta and pulmonary trunk it was 60 mm. In this way arterial wall area of one pulmonary trunk segment equalled with arterial wall areas of four femoral arterial segments and arterial wall area of one ascending aorta segment equalled with arterial wall areas of three pulmonary trunk segments. In each arterial segment lumen circumference equalled with peripheral circumference due to wavy arrangement of endathelial lining.

It was concluded that arterial wall area equalled with arterial length multiplied by arterial wall thickness multiplied by arterial lumen circumforence. Ratio between arterial wall areas of any two arterial. Segments having equal length and equal wall thickness equals with the ratio between iumen circumferences of those arterial segments. Ratio between arterial wall areas of any two arterial segments having equal length and equal lumen circumference equals with the ratio between wall thickneses of those arterial segments.

किसी धमनी की दीवाल का क्षेत्र शरीर के अन्दर शून्य का वह क्षेत्र है जिसमें उस धमनी की दीवाल स्थित होती है। धमनियों की स्पन्दन शक्ति, धमनियों की प्रत्यास्थता तथा धमनियों की मांसलता के परिप्रेक्ष्य में धमनी दीवाल के क्षेत्र का ज्ञान अत्यन्त महत्वपूर्ण है। अतः वर्तमान अध्ययन धमनी दीवाल के क्षेत्र के आकलन करने के दृष्टिकोण से संचालित किया गया।

प्रयोगात्मक

मृत्यूपरान्त 300 ऐसे प्रौढ़ व्यक्तियों के जो किसी भी प्रकार की हृदय अथवा धमनियों की बीमारी से पीड़ित नहीं थे, एसेंडिंग एओर्टा, पल्मोनरी ट्रंक तथा फीमोरल आर्टरी के 10 मिमी० लम्बे धमनी प्रखण्ड उपरोक्त धमनियों के उद्भव के समीप से प्राप्त किये गये। प्रत्येक धमनी प्रखण्ड की गुहा उसकी दीवाल को लम्बाई में काटकर खोली गई और गुहा की परिधि तथा दीवाल की मोटाई मापी गई।

परिणाम तथा विवेचना

एसेंडिंग एओर्टा में दीवाल की मध्यमान मोटाई 1.5 मिमी० पायी गयी जबकि पल्मोनरी ट्रंक तथा फीमोरल आर्टरी में दीवाल की मध्यमान मोटाई 0.5 मिमी० थी। फीमोरल आर्टरी में गुहा की मध्यमान परिधि 15 मिमी० पायी गयी जबकि एसेंडिंग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक में गुहा की मध्यमान परिधि 60 मिमी० थी। आन्तरिक पर्त्त की लहरदार बनावट के कारण प्रत्येक धमनी प्रखण्ड की गुहा की परिधि उसकी वाह्य परिधि के बराबर थी।

1. फीमोरल धमनी प्रखण्ड की दीवाल का क्षेत्र = फीमोरल धमनी प्रखण्ड की लम्बाई × दीवाल की मोटाई × गुहा की परिधि

75 घन मिमी० = 10 मिमी० × 0.5 मिमी० × 15 मिमी०

2. एसेंडिंग एओर्टा प्रखण्ड की दीवाल का क्षेत्र = एसेंडिंग एओर्टा प्रखण्ड की लम्बाई × दीवाल की मोटाई × गुहा की परिधि

100 घन मिमी० = 10 मिमी० × 1.5 मिमी० × 60 मिमी०

3. पल्मोनरी ट्रंक प्रखण्ड की दीवाल का क्षेत्र = पल्मोनरी ट्रंक प्रखण्ड की लम्बाई × दीवाल की मोटाई × गुहा की परिधि

300 घन मिमी० = 10 मिमी० × 0.5 मिमी० × 60 मिमी०

4. एसेंडिंग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक प्रखण्डों की दीवाल के क्षेत्रों के बीच अनुपात $= \frac{\text{एसेंडिंग एओर्टा प्रखण्ड की दीवाल का क्षेत्र}}{\text{पल्मोनरी ट्रंक प्रखण्ड की दीवाल का क्षेत्र}}$

$$\frac{3}{1} = \frac{100 \text{ घन मिमी०}}{300 \text{ घन मिमी०}}$$

5. एसेंडिंग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक प्रखण्डों की दीवाल की मोटाइयों के बीच अनुपात $= \frac{\text{एसेंडिंग एओर्टा प्रखण्ड की दीवाल मोटाई}}{\text{पल्मोनरी ट्रंक प्रखण्ड की दीवाल की मोटाई}}$

$$\frac{3}{1} = \frac{1.5 \text{ मिमी}}{0.5 \text{ मिमी}}$$

6. पल्मोनरी ट्रंक तथा फीमोरल आर्टरी प्रखण्डों की दीवाल के क्षेत्रों के बीच अनुपात $= \frac{\text{पल्मोनरी ट्रंक प्रखण्ड की दीवाल का क्षेत्र}}{\text{फीमोरल आर्टरी प्रखण्ड की दीवाल का क्षेत्र}}$

$$\frac{4}{1} = \frac{300 \text{ घन मिमी०}}{75 \text{ घन मिमी०}}$$

7. पल्मोनरी ट्रंक तथा फीमोरल आर्टरी प्रखण्डों की गुहा की परिधियों के बीच अनुपात $= \frac{\text{पल्मोनरी ट्रंक प्रखण्ड की गुहा की परिधि}}{\text{फीमोरल आर्टरी प्रखण्ड की गुहा की परिधि}}$

$$\frac{4}{1} = \frac{60 \text{ मिमी०}}{15 \text{ मिमी०}}$$

निष्कर्ष

1. किसी धमनी प्रखण्ड की दीवाल का क्षेत्र उसकाई लम्बाई, दीवाल की मोटाई तथा गुहा की परिधि के परस्पर गुणनफल के बराबर होती है।
2. समान लम्बाई तथा समान दीवाल की मोटाई वाले किन्हीं दो धमनी प्रखण्डों की दीवाल के क्षेत्रों का अनुपात उन धमनी प्रखण्डों की गुहा की परिधियों के अनुपात के बराबर होता है।
3. समान लम्बाई तथा समान गुहा की परिधि वाले किन्हीं दो धमनी प्रखण्डों की दीवाल के क्षेत्रों का अनुपात उन धमनी प्रखण्डों की दीवाल की मोटाइयों के अनुपात के बराबर होता है।

उपर्युक्त तीनों निष्कर्ष धमनी दीवाल के क्षेत्र के तीन नियम हैं (Laws to Arterial wall Area) जिन्हें लेखक ने उपर्युक्त परीक्षण परिणामों के आधार पर निकाले हैं।

सारणी 1

समान लम्बाई के धमनी प्रखण्डों की दीवाल का क्षेत्र

	धमनी दीवाल की मोटाई	धमनी गुहा की परिधि	धमनी प्रखण्ड की लम्बाई	धमनी दीवाल का क्षेत्र
एसेंडिंग एओर्टा	1.5 मिमी०	60 मिमी०	10 मिमी०	100 घन मिमी०
पल्मोनरी ट्रंक	0.5 मिमी०	60 मिमी०	10 मिमी०	300 घन मिमी०
फीमोरल आर्टरी	0.5 मिमी०	15 मिमी०	10 मिमी०	75 घन मिमी०

सारणी 2

समान लम्बाई तथा समान गुहा की परिधि वाले धमनी प्रखण्डों की दीवाल के क्षेत्र तथा दीवाल की मोटाइयों के बीच अनुपात

	एसेंडिंग एओर्टा	पल्मोनरी ट्रंक	अनुपात
धमनी दीवाल का क्षेत्र	9.00 घन मिमी०	300 घन मिमी०	3 :1
धमनी दीवाल की मोटाई	1.5 मिमी०	0.5 मिमी०	3 :1

सारणी 2

समान लम्बाई तथा समान दीवाल की मोटाई वाले धमनी प्रखण्डों की दीवाल के क्षेत्रफल तथा गुहा की परिधियों के बीच अनुपात

			अनुपात
धमनी दीवाल का क्षेत्र	300 घन मिमी०	75 घन मिमी०	4 :1
धमनी गुहा की परिधि	60 मिमी०	१५ मिमी०	४ :१

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली ज़ा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती
संस्थापक सम्पादक

डॉ० चन्द्रिका प्रसाद
प्रधान सम्पादक

डॉ० शिव गोपाल मिश्र
प्रबन्ध सम्पादक

Swami Satya Prakash Saraswati
Founder Editor

Dr. Chandrika Prasad
Chief Editor

Dr. Sheo Gopal Misra
Managing Editor

सम्पादन मण्डल

डॉ० एस० के० जोशी (भौतिकी)
भूतपूर्व महानिदेशक, सी० एस० आई० आर०
नई दिल्ली

डॉ० आर० सी० मेहरोत्रा (रसायन)
एमेरिटस प्रोफेसर, रसायन विभाग,
राजस्थान विश्वविद्यालय

डॉ० डी० डी० पंत (वानस्पतिकी)
एमेरिटस साइंटिस्ट, इलाहाबाद वि० वि०

डॉ० एस० के० जैन (वानस्पतिकी)

प्रो० आर० पी० रस्तोगी (रसायन)
एमेरिटस साइंटिस्ट, सी० डी० आर० आई०,
लखनऊ

प्रो० यू० एस० श्रीवास्तव (जीवविज्ञान)
अध्यक्ष, राष्ट्रीय विज्ञान अकादमी

Dr. S.K. Joshi (Physics)
Ex-Director General, C.S.I.R.
New Delhi

Dr. R.C. Mehrotra (Chemistry)
Emeritus Professor,
Rajasthan University

Dr. D.D. Pant (Botany)
Emeritus Scientist
Allahabad University

Dr. S.K. Jain (Botany)

Prof. R.P. Rastogi (Chemistry)
Emeritus Scientist, C.D.R.I.
Lucknow

Dr. U.S. Srivastava (Zoology)
President, N.A. Sciences
Allahabad

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 100 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 25 or 3£ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854 640405

ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 41 October 1998 No. 4



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 41 October 1998 No. 4

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 4, October, 1998.

किरिक प्रकार के अनद्वितीय स्थिर बिंदु प्रमेय

शिखा गुप्ता

गणित विभाग, चिन्मय डिग्री कालेज, रानीपुर, हरिद्वार 249403

तथा

बी० राम

गणित विभाग, एस० आर० टी० परिसर,
एच० एन० बी०, गढ़वाल वि० वि०, टिहरी, गढ़वाल 249 001

[प्राप्त - अप्रैल 28, 1998]

सारांश

इस प्रपत्र में किरिक प्रकार के कुछ अनद्वितीय स्थिर बिंदु प्रमेयों का अध्ययन किया गया है । किरिक प्रकार के अचारी[1], सिंह तथा मिश्रा[11] एवं पाचपट्टे[13] द्वारा प्राप्त परिणामों के परिवर्त एवं विस्तारण इस प्रपत्र में अनुस्यूत हैं । यह प्रपत्र मुख्यतः दो अनुभागों में विभक्त है-

1. प्रारंभिकी

2. तनमॉय सोम की प्रमेय के व्यापकीकरण

Abstract

Non-unique fixed point theorems of Ćiric′ type. *By* Shikha Gupta, Department of Mathematics, Chinmaya Degree College, Ranipur, Hardwar, 249 403, and B. Ram, Mathematics Department, S. R. T. Compound, H. N. Bahuguna Garhwal University, Tihari, Garhwal, 249 001

In this paper, a study of non-unique fixed point theorems of Ciric

type has been presented. Variants and extensions of results of Ciric type obtained by Achari [1], Singh and Mishra [11] and Pachpatte [13] are included in the paper.

This paper is mainly divided into two parts.

1. Preliminaries

2. Generalisations of Tanmoy Som's Theorem

प्रस्तावना

सन् 1963 में गहलर ने 2 दूरीक समष्टि की अवधारणा प्रस्तुत की । सर्वप्रथम 2-दूरीक समष्टि (2-metric space) एवं संबंधित कतिपय परिभाषाओं एवं आधारभूत स्थिर बिंदु प्रमेयों का संक्षिप्त विवरण दिया जा राहा है।

एक (अरिक्त) समुच्चय X के लिये $X \times X \times X$ पर वास्तविक मानीय फलन d को 2-दूरीक कहते हैं यदि निम्न शर्तें संतुष्ट हों-

(अ-1) दो भिन्न बिंदुओं x, y के लिये तीसरा बिंदु z इस प्रकार हो कि $d(x, y, x) \neq 0$,

(अ–2) यदि तीन बिंदुओं x, y एवं z में से कम दो बिन्दु समान हों तो $d(x, y, z) = 0$,

(अ-3) $d(x, y, z) = d(y, z, x) = d(z, x, y)$ (तीन चरों में सममिति),

(अ-4) $d(x, y, z) \leq d(x, y, u) + d(x, u, z) + d(u, y, z)$ (त्रिभुजीय असमिका),

तब युग्म (X, d) को 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है । एस० गहलर [6] द्वारा यह दिखाया गया है कि दूरीक d फलन अनृण संख्या है।

इस प्रपत्र में दूरीक समष्टि (अथवा संकेतन की समानता का ध्यान रखते हुये) 1-दूरीक समष्टि के लिए (M, d) व 2-दूरीक समष्टि के लिये (X, d) का प्रयोग किया गया है।

2-दूरीक समष्टि X का एक अनुक्रम $\{x_n\}$ कोशी (Cauchy sequence) कहा जाता है कि यदि X के प्रत्येक u के लिये $d(x_m, x_m, u) = 0$.

एक 2-दूरीक समष्टि जिसका प्रत्येक कोशी अनुक्रम उसी में अभिसार करता हो, पूर्ण 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है।

दूरीक समष्टि पर दुर्बल/दुर्बल* क्रमविनिमयी (Commuting) एवं उपगामी क्रमविनिमयी (या सुसंगत) प्रतिचित्रणों (Mappings) को अधिक व्यापक स्तर पर अध्ययन करने के उद्देश्य से हाल ही में आर० पी० पंत[15] ने नये वर्ग के प्रतिचित्रणों को सन्निवेशन किया है, जो यथातथ्यतः निम्नवत् है-

1. परिभाषा

किसी धनात्मक संख्या R के लिये दूरीक समष्टि (M, d) पर प्रतिचित्रणों S व T को R-दुर्बल क्रमविनिमयी कहा जायेगा यदि समष्टि M के प्रत्येक बिन्दु x हेतु, $d(STx, TSx) \le Rd(Sx, Tx)$.

यदि यह प्रतिबन्ध समष्टि M के किसी बिन्दु $x = z$ के लिये संतुष्ट हो तो प्रतिचित्रण S व T बिन्दु z पर R-दुर्बल क्रमविनिमयी कहे जायेंगे।

स्पष्टतः $R = 1$ लेने पर R-दुर्बल क्रमविनिमेयता और दुर्बल क्रमविनिमेयता एकसमान हो जाती हैं।

प्रारंभिकी

सन् 1974 में, किरिक[4] ने सर्वप्रथम दूरीक समष्टि M पर संतत स्वप्रतिचित्रण (Self mapping) T के लिये एक अनद्वितीय (non-unique) स्थिर बिन्दु प्रमेय का अध्ययन किया, जिसमें प्रतिचित्रण इस शर्त को संतुष्ट करता है-

समष्टि M में सभी x, y, व $q \in (0,1)$ के लिये,

न्यूनतम $\{ d(Tx, Ty), d(x, Tx), d(y, Ty)$

$-$ न्यूनतम $\{d(x, Ty), d(y, Tx)\} \le qd(x, y)$

किरिक[3] के परिणामों का अन्य शोधकर्ताओं-यथा आर्गिरस[2], धर्ग[5], आईसेकी[7], [8], लाल तथा दास[9], मिश्रा[10], नारायण आदि[12], पाटपट्टे[14], पाठक[16], [17], सिंह तथा इसेकी[20], सिंह तथा कुमार[21], [22] तथा सोम [23] द्वारा विभिन्न विन्यासों में विस्तारित अध्ययन तथा व्यापकीकरण हुआ।

तनमॉय सोम की प्रमेय के व्यापकीकरण

तनमॉय सोम[23] ने पूर्ण दूरीक समष्टि में दो स्वप्रतिचित्रणों के लिये निम्न उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु प्रमेय को रे एवं ताशकोविक के परिणाम का व्यापकीकरण करके प्राप्त किया।

1. प्रमेय –माना (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है। मान लें समष्टि M पर दो स्वप्रतिचित्रण f एवं g ऐसे हैं कि-

$$g(M) \subseteq f(M), \tag{1.1}$$

समष्टि M पर f संतत है , (1.2)

प्रत्येक $x, y \subseteq M$ के लिये g निम्न शर्त को संतुष्ट करता है-

$$a_1\, d\,(g(x),\ g(y)) + a_2\, d\,(f(x),\ g(x)) + a_3\, d\,(f(y),\ g(y)) + a_4\, d\,(f(x),\ f(y))$$

$$-\text{न्यूनतम}\ \{\, d\,(f(x),\ g(y)),\ d\,(f(y),\ g(x)),\ d\,(f(x),\ f(y))\,\}$$

$$\leq qd\,(f(x),\ f(y)), \qquad (1.3)$$

जहां $a_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad q > 0,\ a_1 + a_4 > q + 1, \quad a_1 + a_3 > 0;$

f एवं g क्रमविनिमयी हैं, (1.4)

तो f एवं g समष्टि M में एक अद्‌वितीय उभयनिष्ठ (Common) स्थिर बिन्दु रखते हैं।

इस प्रमेय के व्यापकीकरण (generalization) में हमने समष्टिM को पूर्ण न लेते हुए $f(M)$ या $g(M)$ को समष्टि M में पूर्ण उपसमष्टि लिया है, तथा f या g किसी भी प्रतिचित्रण का संतत होना आवश्यक नहीं है । हमारा प्रथम परिणाम निम्नवत् है—

2. उपमेय

माना (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है । मान लें समष्टि M पर दो स्वप्रतिचित्रण f एवं g प्रतिबंधों (1.1), (1.3) एवं निम्न प्रतिबंध को संतुष्ट करते हैं-

$f(M)$ या $g(M)$ समष्टिM में पूर्ण उपसमष्टि हैं। (2.1)

तब f एवं g एक संपात बिन्दु रखते हैं अर्थात् समष्टि M में एक बिन्दु z का अस्तित्व ऐसा है कि

$$fz = gz.$$

पुनः यदि f एवं g (केवल) बिन्दु z पर क्रमविनिमयी हो तो f एवं g एक अद्‌वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु रखते हैं।

उपपत्ति

समष्टि M में कोई बिन्दु x_0 लें, तब (1.1) के आलोक में हम एक बिन्दु x_1 इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं कि—

$$f\left(x_1\right) = g\left(x_0\right) y_1$$

व्यापक रूप में

$x_{n-1} \in M, \quad x_n \in M$ इस प्रकार हैं कि

$$f(x_n) = g(x_{n-1}) = y_n, \; n = 1, 2, \ldots .$$

अब (1.3) में $X = X_{n+1}$, $Y = X_n$ रखने पर,

$$d(y_{n+2}, y_{n+1}) \leq \left(\frac{q - a_3 - a_4}{a_1 + a_2}\right) d(y_{n+1}, y_n)$$

$$= pd(y_{n+1}, y_n),$$

जहाँ $$p = \frac{q - a_3 - a_4}{a_1 + a_2} < 1.$$

इसलिये $\{y_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है, अर्थात् $\{f(x_n)\}$ एक कोशी अनुक्रम है । यदि हम $f(M)$ को M का पूर्ण उपसमष्टि लें तो $\{f(x_n)\}$, $f(M)$ में एक सीमा बिन्दु रखता है।

माना यह r है। तब समष्टि M में एक ऐसे बिन्दु x का अस्तित्व होता है कि-

$$fz = r.$$

शर्त (1.3) से,

$$a_1 d\left(g(x_{n-1}), g(z)\right) + a_2 d\left(f(x_{n-1}), g(x_{n-1})\right)$$

$$+ a_3 d(f(z), g(z)) + a_4 d\left(f(x_{n-1})\right), f(z))$$

$$-\text{न्यूनतम}\left\{d\left(f(x_{n-1}), g(z)\right), d\left(f(z), g(x_{n-1})\right), d\left(f(x_{n-1}), f(z)\right)\right\}$$

$$\leq qd\left(f(x_{n-1}), f(z)\right).$$

n का सीमान्त मान लेने पर

$$a_1 d(f(z), g(z)) + a_3 d(f(z), g(z))$$

$$-\text{न्यूनतम}\ \{d(f(z), g(z)), d(f(z), f(z)), d(f(z)), f(z))\}$$

$$\leq qd(f(z), f(z))$$

अर्थात्

$$\left(a_1 + a_3\right) d(f(z),\ g(z)) \leq 0,$$

$$d(f(z),\ g(z)) \leq 0,$$

जिससे

$$f(z) = g(z).$$

इसलिये बिन्दु z प्रतिचित्रणों f एवं g का एक संपात बिन्दु है । ध्यान दें कि प्रतिचित्रण g बिन्दु z पर क्रमविनिमयी हैं । अस्तु

$$fgz = gfz$$

या
$$fgz = gfz = ggz.$$

शर्त (2.2) से

$$a_1 d(g(g(z)),\ g(z)) + a_2 d(f(g(z)),\ g(g(z)))$$

$$+\ a_3 d(f(z),\ g(z)) + a_4 d(f(g(z)),\ f(z))$$

$$-\text{न्यूनतम}\ \{d(g(g(z)),\ g(z)),\ d(g(z),\ g(g(z)),\ d(f(g(z)),\ f(z)))\}$$

$$\leq qd(f(g(z)),\ f(z))$$

या
$$\left(a_1 + a_4 - 1 - q\right) d(g(g(z)),\ g(z)) \leq 0.$$

इसलिये $g(g(z)) = g(z)$.। अब $f(g(z)) = g(f(z)) = g(g(z)) = g(z)$ अर्थात् $g(z)$ प्रतिचित्रणों f एवं g का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है।

पुनः शर्त (1.3) से यह आसानी से देखा जा सकता है कि $g(z) = f(z)$ प्रतिचित्रणों f एवं g का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है।

यदि $g(M)$ समष्टि $f(M)$ का पूर्ण उपसमष्टि हो तो $g(M) \subset f(M)$ होने के कारण अनुक्रम $\{f(x_n)\}$, $f(M)$ में अभिसारित होगा। अस्तु, इस स्थिति में भी f एवं g उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु रखते

हैं। उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु की अद्विवितीयता (uniqueness) स्थापित करना सरल है।

टिप्पणी- शर्त (1.3) के बायी तरफ की असमिका (inequality) के व्यंजक में $d(f(x), f(y))$ का विलोपन करने पर उक्त प्रमेय की उपप्रमेय प्राप्त कर सकते हैं जो बिना उपपत्ति के निम्न है-

3. उपप्रमेय—मान लें (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है । मान लें समष्टि M में दो स्वप्रतिचित्रण f एवं g प्रतिबधों (1.1), (2.1) एवं निम्न प्रतिबंध को संतुष्ट करते हैं-

$$a_1 d(g(x), g(y)) + a_2 d(f(x). g(x)) + a_3 d(f(y), g(y))$$

$$-\text{न्यूनतम}\{d(f(x), g*y)), d(f(y), g(x))\}$$

$$\leq qd(f(x), f(y)) \quad (3.1)$$

जहाँ $a_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3,\ q > 0,\ a_i > q + 1,\ a_1 + a_3 > 0.$

तब f एवं g एक संपात बिन्दु रखते हैं अर्थात् समष्टि M में बिन्दु z का अस्तित्व ऐसा है कि $fz = gz$ । पुनः, यदि f एवं g (केवल) बिन्दु z उप क्रमविनिमयी हैं तब f एवं g एक अद्विवितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु रखते हैं।

प्रमेय 1 का अनुप्रयोज्य 2-दूरीक समष्टि में भी किया जा सकता है जो निम्न प्रकार से है-

4. प्रमेय—माना (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है । मान लें समष्टि X पर दो स्वप्रतिचित्रण f एवं g इस प्रकार है कि-

$$g(X) \subseteq f(X) \text{एवं} \quad (4.1)$$

प्रत्येक $x, y, u \in X$ के लिये

$$a_1 d(g(x), g(y), u) + a_2 d(f(x), g(x), u)$$

$$+ a_3 d(f(y), g(y), u) + a_4 d(f(x), f(y), u)$$

$$-\text{न्यूनतम}\{df(x), g(y), u), d(f(y), g(x), u), d(f(x), f(y), u)\}$$

$$\leq qd(f(x), f(y), u) \quad (4.2)$$

जहाँ $a_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\ q > 0,\ a_1 + a_4 > q + 1,\ a_1 + a_3 > 0$

यदि $f(X)$ या $g(X)$ समष्टि X में पूर्ण उपसमष्टि है, (4.3)

तब f एवं g एक संपात (Coincidence) बिन्दु रखते हैं अर्थात् समष्टि X में बिन्दु z का अस्तित्व इस प्रकार है कि $fz = gz$.

पुनः, यदि f एवं g (केवल) बिन्दु z पर क्रमविनिमयी हैं तब f एवं g एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु रखते हैं,

उपपत्ति—इस प्रमेय की उपपत्ति हर प्रमेय 1 की उपपत्ति के समान कर सकते हैं।

टिप्पणी—इस प्रमेय की शर्त (4.2) में $d(f(x), f(y), u)$ का विलोपन करने पर उपप्रमेय 3 के समान ही 2-दूरीक समष्टि में स्थिर बिन्दु प्रमेय प्राप्त किया जा सकता है,

2-दूरीक समष्टि (X, d) में चार संतत प्रतिचित्रणों P, Q, S व $T : X \to X$ के लिये स्थिर बिन्दु प्रमेय प्रतिपादित की गई हैं जो निम्न प्रकार की संकुचित शर्तों को संतुष्ट करती हैं।

समष्टि X में प्रत्येक x, y व u के लिये कतिपय k' के लिये $k'/k \in (0, 1)$

$$\text{न्यूनतम}\{d(Px, Qy, u), d(x, Px, u), d(y, Qy, u)\}$$

$$+k\,\text{न्यूनतम}\{d(x, Qy, u), d(y, Px, u)\} \le kd(x, y, u); \qquad (1)$$

समष्टि X में प्रत्येक x, y व u के लिये एवं कतिपय k' के लिये $k'/k \in (0, 1)$

$$\text{न्यूनतम}\{d(Px, Qy, u), d(Tx, Px, u), d(Ty, Qy, u)\}$$

$$+k\,\text{न्यूनतम}\{d(Px, Ty, u), d(Qy, Tx, u)\} \le kd(Tx, Ty, u); \qquad (2)$$

समष्टि X में प्रत्येक x, y व u के लिये एवं कतिपय k' के लिये $k'/k \in (0, 1)$

$$\text{न्यूनतम}\{d(Px, Qy, u), d(Px, Sx, u), d(Qy, Ty, u)\}$$

$$+k\,\text{न्यूनतम}\{d(Px, Ty, u), d(Qy, Sx, u)\} \le kd(Sx, Ty, u): \qquad (3)$$

नारायण इत्यादि[12] ने शर्त (3) का प्रयोग करके निम्न स्थिर बिन्दु प्रमेय को प्रतिपादित किया है।

5. **प्रमेय**—मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है, एवं P, Q, S, T प्रतिचित्रण इस प्रकार है जो शर्त (3) और निम्न शर्तों को संतुष्ट करते हैं।

$$PT = TP,\ PS = SP,\ QT = TQ,\ QS = SQ \text{ एवं } TS = ST; \qquad (5.1)$$

$$PT(X) \cup QS(X) \subseteq ST(X)\,; \tag{5.2}$$

P, Q एवं T अनुक्रमतः संतत हैं। (5.3)

तो P, Q, S एवं T एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु रखते हैं।

इस प्रमेय का व्यापकीकरण क्रमविनिमयता को शिथिल करके किया गया है । इसमें क्रमविनिमयता के स्थान पर R-दुर्बल क्रमविनिमयता का प्रयोग किया गया है-

6. प्रमेय—मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है एवं P, Q, S, T प्रतिचित्रण प्रतिबंधों (3), (5.2), (5.3) व निम्न को संतुष्ट करते हैं-

प्रतिचित्रण युग्म $\{P, S\}$ एवं $\{T, Q\}$ R-दुर्बल क्रमविनिमयी है एवं प्रतिचित्रण युग्म $\{T, S\}$ क्रम क्रमविनिमयी हैं। (6.1)

तब प्रतिचित्रण P, Q, S एवं T एवं अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु रखते हैं।

उपपत्ति—समष्टि X में x_o लें एवं शर्त (5.2) से अनुक्रम $\{x_n\}$ की रचना इस प्रकार है कि

$$PTx_{2n} = STx_{2n+1}$$

$$QSx_{2n+1} = STx_{2n+2},\ n = 0, 1, 2, \dots .$$

शर्त (3) से,

समष्टि X में प्रत्येक u के लिये,

$$\text{न्यूनतम}\Big\{ d\big(PTx_{2n}, QSx_{2n+1}, u\big), d\big(PTx_{2n}, STx_{2n}, u\big)$$

$$d\big(QSx_{2n+1}, TSx_{2n+1}, u\big)\Big\}$$

$$+ k\,\text{न्यूनतम}\Big\{ d\big(PTx_{2n+1}, TSx_{2n+1}, u\big), d\big(QSx_{2n+1}, STx_{2n}, u\big)\Big\}$$

$$\leq kd\big(STx_{2n}, TSx_{2n+1}, U\big)$$

जहां k' इस प्रकार है $k'/k \in (0, 1)$.

अर्थात् X में प्रत्येक u के लिये

$$\text{न्यूनतम}\left\{d\left(STx_{2n+1},\ STx_{2n+2},\ u\right),\ d\left(STx_{2n},\ STx_{2n+1},\ u\right),\right.$$

$$\left.d\left(STx_{2n+1},\ STx_{2n+2},\ u\right)\right\}$$

$$+k\ \text{न्यूनतम}\left\{d\left(STx_{2n+1},\ STx_{2n+1},\ u\right),\ d\left(STx_{2n},\ STx_{2n+2},\ u\right)\right\}$$

$$\leq k'd\left(STx_{2n},\ STx_{2n+1},\ u\right)$$

जहाँ k' इस प्रकार है $k'/k \in (0,\ 1)$.

इसलिये

$$d\left(STx_{2n+1},\ STx_{2n+2},\ u\right) \leq k'd\left(STx_{2n},\ STx_{2n+1},\ u\right).$$

इसी प्रकार

$$d\left(STx_{2n+2},\ STx_{2n+3},\ u\right) \leq kd\left(STx_{2n+1},\ STx_{2n+2},\ u\right).$$

व्यापक रूप में, X में प्रत्येक u के लिये

$$d\left(STx_{n+1},\ STx_{n+2},\ u\right) \leq kd\left(STx_{n},\ STx_{n+1},\ u\right).$$

सिंह की प्रमेयिका[18] से $\{STx_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है एवं समष्टि X में बिन्दु z पर अभिसारित करता है।

प्रतिचित्रणों की संतत शर्तों के द्वारा हम कह सकते हैं।

$$STx_n \to z$$

$$STx_{2n} \to z$$

$$PTx_{2n} \to z$$

$$QSx_{2n+1} \to z$$

$$SPTx_{2n} \to Sz$$

समष्टि X के किसी अवयव u एक लिये त्रिभुज असमिका द्वारा,

$$d\left(PSTx_{2n}, Sz, u\right) \leq d\left(PSTx_{2n}, Sz, SPTx_{2n}\right)$$
$$+ d\left(PSTx_{2n}, SPTx_{2n}, u\right)$$
$$+ d\left(SPTx_{2n}, Sz, u\right).$$
$$\leq Rd\left(PTx_{2n}, STx_{2n}, Sz\right)$$
$$+ Rd\left(PTx_{2n}, STx_{2n}, u\right)$$
$$+ d\left(SPTx_{2n}, Sz_{2n}, u\right)$$

(चूंकि P एवं S, R-दुर्बल क्रमविनिमयी हैं)

n का सीमान्त मान लेने पर

$$PSTx_{2n} \to Sz$$

प्रतिचित्रण P संतत है इस कारण से,

$$PSTx_{2n} \to Pz$$

इसलिये $\qquad Pz = Sz.$

प्रतिचित्रण T संतत है इसलिये $TQSx_{2n+1} \to Tz$

त्रिभुज असमिका से

$$d\left(QTSx_{2n+1}, Tz, u\right) \leq d\left(QTSx_{2n+1}, Tz, TQSx_{2n+1}\right)$$
$$+ d\left(QTSx_{2n+1}, TQSx_{2n+1}, u\right) + d\left(TQSx_{2n+1}, Tz, u\right)$$
$$\leq Rd\left(QSx_{2n+1}, TSx_{2n+1}, Tz\right) + Rd\left(QSx_{2n+1}, TSx_{2n+1}, u\right)$$
$$+ d\left(TQSx_{2n+1}, Tz, u\right)$$

(चूँकि P एवं S, R-दुर्बल क्रमविनिमयी हैं व S एवं T क्रमविनिमयी हैं या शर्त (6, 7) से)

n का सीमान्त मान लेने पर

$$QTSx_{2n+1} \to Tz$$

या $$QSTx_{2n+1} = QTSx_{2n+1} \to Tz$$

प्रतिचित्रण Q संतत है इसलिये $QSTx_{2n+1} \to Q\,z$

अतः $$Qz = Tz.$$

चूँकि प्रतिचित्रण S एवं T संतत है

$$SSTx_{2n} \to Sz,\ TSTx_{2n+1} \to Tz$$

शर्त (3) से

$$\text{न्यूनतम}\left\{ d\left(PSTx_{2n},\ QSTx_{2n+1},\ u\right), d\left(PSTx_{2n},\ SSTx_{2n},\ u\right)\right.$$
$$\left. d\left(QSTx_{2n+1},\ TSTx_{2n+1},\ u\right)\right\}$$
$$+\text{k न्यूनतम}\left\{ d\left(PSTx_{2n},\ TSTx_{2n+1},\ u\right), d\left(QSTx_{2n+1},\ SSTx_{2n+1},\ u\right)\right\}$$
$$\leq kd\left(SSTx_{2n},\ TSTx_{2n+1},\ u\right)$$

n का सीमान्त मान लेने पर

$$\text{न्यूनतम}\ \{\ d(Sz,\ Tz,\ u),\ d(Sz,\ Sz,\ u),\ d(Tz,\ Tz,\ u)\ \}$$
$$+\text{k न्यूनतम}\ \{\ d(Sz,\ Tz,\ u),\ d(Tz,\ Sz,\ u)\ \}$$
$$\leq k'd(Sz,\ Tz,\ u)$$

$$d(Sz,\ Tz,\ u) = 0 \quad \text{ध्यान दें } k'/k \in (0,\ 1)$$

अतः $$Sz = Tz.$$

इसलिये $$Pz = Sz = Tz = Qz.$$

शर्त (3) से

$$\text{न्यूनतम}\left\{ d\left(PTx_{2n}, Qz, u \right), d\left(PTx_{2n}, STx_{2n}, u \right), d(Qz, Tz, u) \right\}$$

$$+ k \text{ न्यूनतम} \left\{ d\left(PTx_{2n}, Tz, u \right), d\left(Qz, STx_{2n}, u \right) \right\}$$

$$\leq kd\left(STx_{2n}, Tz, u \right)$$

n का सीमान्त मान लेने पर

$$\text{न्यूनतम}\{d(z, Qz, u), d(z, z, u), d(Qz, Tz, u)\}$$

$$+k \text{ न्यूनतम} \{d(z, Tz, u), d(Qz, z, u)\}$$

$$\leq k' d(z, Tz, u)$$

अर्थात् $d(z, Tz, u) = 0$ जिससे $z = Tz$.

अतः $z = Pz = Qz = Sz = Tz$.

इसलिये हम कह सकते हैं कि z प्रतिचित्रणों P, Q, S एवं T का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है।

माना w प्रतिचित्रणों P, Q, S एवं T का दूसरा उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है।

$$\text{न्यूनतम} \{d(Pz, Qz, u), d(Pz, Sz, u), d(Qz, Tz, u)\}$$

$$+ k \text{न्यूनतम} \{d(Pz, Tw, u), d(Qw, Sz, u)\}$$

$$\leq k' d(Sz, Tw, u)$$

इसलिये z=w.

अतः प्रतिचित्रण P, Q, S एवं T एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु रखते हैं।

सिंह तथा इसेकी[20] ने 2-दूरीक समष्टि में स्वप्रतिचित्रणों के लिये निम्न बिन्दु प्रमेय को प्रतिपादित किया।

7. प्रमेय—माना 2-दूरीक समष्टि X में स्वप्रतिचित्रण P, Q एवं T निम्न शर्तों को संतुष्ट करते हैं।

$$PT = TP, \ QT = TQ; \tag{7.1}$$

$$\text{न्यूनतम } \{d(Px, Qy, u)\ d(Tx, Px, u), d(Ty, Qy, u)\}$$

$$+k\text{न्यूनतम } \{d(Tx, Qy, u), d(Ty, Px, u)\}$$

$$\leq k'd(Tx, Ty, u) \tag{7.2}$$

$\forall x, y, u \in X$ एवं कुछ $k', k'/k \in (0, 1)$;

समष्टि X में अनुक्रम $\{x_n\}_{n \in w}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि प्रत्येक $n \in w$ के लिये

$$Tx_{2n+1} = Px_{2n}$$

$$Tx_{2n+2} = Qx_{2n+1} \tag{7.3}$$

जहाँ W ऋणेतर पूर्णांकों का समुच्चय है ;

अनुक्रम $\{Tx_n\}$ का उपानुक्रम समष्टि X में बिन्दु Z पर अभिसारित करता है ; (7.4)

प्रतिचित्रण P, Q एवं T बिन्दु पर अनुक्रमतः संतत हैं। (7.5)

तो बिन्दु z प्रतिचित्रणों P, Q, एवं T का एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होगा।

इस प्रमेय को हमने व्यापकीकृत करके निम्न स्थिर उपप्रमेय को प्राप्त किया है।

8. उपप्रमेय—माना 2-दूरीक समष्टि X में स्वप्रतिचित्रण P, Q एवं T शर्तों (7.2), (7.3), (7.4), (7.5) व निम्न शर्त को संतुष्ट करते हैं।

{P,T} एवं {Q,T}, R-दुर्बल क्रमविनिमयी युग्म है (8.1)

तो बिन्दु z प्रतिचित्रणों P, Q एवं T का एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होगा।

उपपत्ति—इस प्रमेय में प्रयुक्त शर्त (7.2), द्वितीय अनुभाग में शर्त (3) की विशेष दशा है । वास्तव में शर्त (3) में हम S = T रखने पर शर्त (7.2) को प्राप्त कर सकते हैं, अतः इसकी उपपत्ति प्रमेय 6 के अनुसार की जा सकती है।

निर्देश

1. अचारी जे. : Mat. Vastnik, 1978 : 13, 255-257.

2. आर्ग्योस, आई. के. : Mat. Vesnik, 1987 :.37, 377-380.

3. किरिक, एल. बी. : Publ. Inst. Math, 1973 : 17(31), 52-58.

4. वही : Publ. L'Inst. Math , (N. S.) 1974 : 17 (31), 57-58.

5. धांगे, बी. सी. : Indian J. Pure Appl. Math 1985 : 16, 245-256.

6. गहलर, एस. : Math Nachr, 1964 : 26, 115-148.

7. इसेकी के. : Math Sem, Notes, Kobe Univ. 1976 : 4, 193-202.

8. वही, 1975 : 4, 133-136.

9. लाल, एस. एन. तथा दास, एम. : Math Sem., Notes Kobe Univ. 1980 : 8, 83-90

10. मिश्रा, एस. एन. : Nanta Math, 1979 : 12, 83-90

11. मिश्रा, एस. एन. तथा सिंह, एस. एन. : Math. Japonica, 1962 : 37(2), 329-332.

12. नारायन, के. ए., थपेलियाल पी. एस. तथा वीरेन्द्र : Math. Student, 1983 : 51, 215-221.

13. पाचपट्टे, बी. जी. : Indian J. Pure Appl. Math. 1979 : 10(8), 1039-1043.

14. वही : Chung Yuan J. 1979 : 8, 7-12

15. पन्त, आर. पी. : J. Math. Anal. Appl. 1994 : 188(2), 436-440.

16. पाठक, एच. के. : Ranchi Univ. Maths. Journal, 1986 : 17.

17. वही, : J. Pure Appl, Math. Sci. 1988 : 27, 41-47.

18. सिंह, एस. एल. : Math Sem. Notes, Kobe Univ. 1979 : 7, 1-11

19. सिंह, एस. एल. तथा कसहरा एस. : Indian J. Pune Appl. Math. 1982 : 13(7), 1-11.

20. सिंह, एस० एल० तथा इसेकी, के., : Indian, J. Phy. Natur. Sci. 1983 : 3 Sec. B.

21. सिंह, एस. एल. तथा कुमार, वी. : विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 1987 : 30(3) ,169-174.

22. सिंह, एस. एल. तथा कुमार, वी. : विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका,1987 : 30(4), 207-211.

23. तन्मोय, सोम : Indian J. Pure Appl. Math., 1985 : 16(6), 575-585.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 4, October, 1998.

बहुचरीय सार्वीकृत हाइपज्यामितीय फलनों के आयलरी समाकल

एच० एस० पी० श्रीवास्तव

गणित विभाग, शा० कला एवं विज्ञान महाविद्यालय, रतलाम (म० प्र०)

[प्राप्त-जून 28, 1998]

सारांश

इस प्रपत्र का मुख्य उद्देश्य दो बहुचरीय H-फलनों के गुणन को अंतर्वलन करने वाला एक व्यापक आयलरी समाकल ज्ञात करना है। इस व्यापक आयलरी समाकल में शामिल फलनों का विशेषीकरण करके अनेक आयलरी समाकलों को निकाला गया है-जैसे दो सार्वीकृत लॉरीसेला फलनों के गुणन को अंतर्वलन करने वाला आयलरी समाकल। ये सभी समाकल अपने आप में व्यापक हैं। अंत में इन सभी समाकलों को भिन्नात्मक सूत्रों में परिवर्तित किया गया है।

Abstract

Eulerian integrals of multivariable generalized hypergeometric functions. *By* H. S. P. Shrivastava, Department of Mathematics, Govt. Arts and Science College, Ratlam (M. P.)

The main aim of the present paper is to evaluate a general Eulerian integral involving a product of two multivariable H-functions. By specializing the involved functions in this general Eulerian integral, we derived many Eulerian integrals, i.e.- Eulerian integrals involving a product of two generalized Lauricella functions of several complex variable. Each derived Eulerian integral is most general in itself. In the last section, each of the Eulerian integral can easily be stated as a fractional integral formula.

1. प्रस्तावना

गॉमा-बीटा फलन वाद [9, p. 18 (i)] में वर्णित सर्वविदित आयलरी समाकल :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (1.1)$$

$$\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0.$$

के चर मालूली परिवर्तन करके उसको निम्न रूप से लिखा जा सकता है --

$$\int_a^b (t-a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} dt = (b-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta), \quad (1.2)$$

$$\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0; \ a \neq b.$$

द्विपद प्रसार

$$(ut+\upsilon)^{\gamma} = (au+\upsilon)^{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)_m}{m!} \times \left\{ -\frac{(t-a)u}{au+\upsilon} \right\}^m, \quad (1.3)$$

$$\left| \frac{(t-a)u}{au+\upsilon} \right| < 1, \ t \in [a, b].$$

सूत्र (1.2) एवं (1.3) की सहायता से निम्न सूत्र [8, p. 301 (2.2.6.1)] प्राप्त होता है--

$$\int_a^b (t-a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} (ut+\upsilon)^{\gamma} dt$$

$$= (b-a)^{\alpha+\beta-1} (au+\upsilon)^{\gamma} B(\alpha, \beta) \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, -\gamma; \\ \alpha+\beta \end{matrix} -\frac{(b-a)u}{au+\upsilon} \right), \quad (1.4)$$

$$\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0, \ |arg (bu+\upsilon/au+\upsilon)| < \pi, \ a \in b.$$

एक, दो या बहुचरों के विशेष फलनों (Special Fyctions) के भिन्नात्मक अवकलजों और भिन्नात्मक समाकलों के अभिकलन (Computation) की अधिक उपयोगिता होने के कारण इन सूत्रों का अत्यंत महत्व है– जैसे-श्रेणी और समाकलों के मूल्यांकर में[5, 25] जनरेटिंग फलनों के व्युत्पत्ति में [19, Chapt.5] और अवकल तथा समाकल समीकरणों के हल को ज्ञात करने में [22 Chapt. 3, 3, 5, 6, 21]। इन एवं अनेक दूसरे अनुप्रयोगों से अभिप्रायित (motivated] होकर अनेक शोधकर्ताओं ने भिन्न-भिन्न विशेष

फलनों को अन्तर्वलय करने वाले अनेक भिन्नात्मक अवकलज सूत्रों को ज्ञात किया[4, 10, 20, 21, 23, 27]।

इस प्रपत्र के बाद के अनुभाग में यह दिखाया गया है कि पूर्व वर्ती अनुभाग में ज्ञात किये गये आयलरी समाकलों को भिन्नात्मक समाकल सूत्रों में आसानी से परिवर्तित किया जा सकता है। परिचित भिन्नात्मक अव-समाकल संकारक (differ-integral operator) को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है[7, 11, 14]:

$$ {}_{\alpha}D_{x}^{\mu} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\mu)} \displaystyle\int_{\alpha}^{x} (x-t)^{-\mu-1} f(t)\, dt; \ \alpha \in R,\ \mathrm{Re}(\mu) < 0 \\[2ex] \dfrac{d^m}{dx^m}\ {}_{\alpha}D_{x}^{\mu-m} f(x);\ 0 \le \mathrm{Re}(\mu) < m,\ m \in N \end{cases} \tag{1.5} $$

बशर्ते कि समाकल विद्यमान हो।

जब $\alpha = 0$ हो तो, संकारक

$$ D_{x}^{\mu} \equiv {}_{0}D_{x}^{\mu}, \quad (\mu \in C) \tag{1.6} $$

चिर प्रतिष्ठित μ (या $-\mu$.) कोटि के रीमन-लियोविले भिन्नात्मक समाकल को इंगित करता है। जब $\alpha \to \infty$ तो समीकरण (1.5) परिचित वेइल (Weyl) भिन्नात्मक समाकल की परिभाषा में परवर्तित हो जाता है।

इस प्रपत्र में हम दो बहुचरीय H-फलनों के गुणन को अंतर्वलय करने वाला एक व्यापक ऑयलरी समाकल ज्ञात करेंगे। बहुचरीय H-फलन को श्रीवास्तव तथा पंडा [16, p. 271 (4.1) et. Seq] ने प्रचारित किया और उसके बहुत से गुणधर्मों का सममितीय अध्ययन अपने अनेक शोधपत्रों के द्वारा किया। हमने उनके द्वारा दिये गये संक्षिप्त संकेतनों तथा विविध कल्पनाओं को ग्रहण किया है। [14-18, 20, 23]:

माना

$$ H[z_1, \ldots, z_r] = H^{0,\, n\, :\, m_1,\, n_1;\, \ldots;\, m_r,\, n_r}_{p,\, q\, :\, p_1,\, q_1;\, \ldots;\, p_r,\, q_r} $$

$$ \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(a_j;\, \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \left(c_j^1,\, \gamma_j^1\right)_{1,p_1}; \ldots; \left(c_j^{(r)},\, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \\ \left(b_j;\, \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \left(d_j^1,\, \delta_j^1\right)_{1,q_1}; \ldots; \left(d_j^{(r)},\, \delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix} \right], \tag{1.7} $$

γ समिश्र चरों $z_1, \ldots, z_r$ वाले H-फलन को निरूपित करता है। सुविधा के लिए

$$\left(a_j ; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1, p} \quad p\text{-सदस्यों}$$

$$\left(a_1 ; \alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^{(r)}\right), \ldots, \left(a_p ; \alpha_p^1, \ldots, \alpha_p^{(r)}\right); \tag{1.8}$$

को निरूपित करता है जबकि

$$\left(c_j^{(i)}, \gamma_j^{(i)}\right)_{1, p_2} ; p_i\text{–सदस्यों}$$

$$\left(c_j^{(i)}, \gamma_j^{(i)}\right), \ldots, \left(c_{p_i}^{(i)}, \gamma_{p_i}^{(i)}\right); \tag{1.9}$$

को निरूपित करता है। इसी प्रकार अन्य प्राचलों

$$\begin{cases} a_j, j = 1, \ldots, p ; c_j^{(i)}, j = 1, \ldots, p_i ; \\ b_j, j = 1, \ldots, q ; d_j^{(i)}, j = 1, \ldots, q_i ; \{ i = 1, \ldots, r\} \end{cases} \tag{1.10}$$

समिश्र संख्यायें हैं और सम्बद्ध गुणांक

$$\begin{cases} \alpha_j, j = 1, \ldots, p ; \gamma_j^{(i)}, j = 1, \ldots, p_i ; \\ \beta_j, j = 1, \ldots, q ; \delta_j^{(i)}, j = 1, \ldots, q_i ; \{ i = 1, \ldots, r\} \end{cases} \tag{1.11}$$

धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं इस प्रकार कि

$$\Lambda_i \equiv \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{p_i} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q_i} \delta_j^{(i)} \leq 0, \tag{1.12}$$

और

$$\Omega_i = -\sum_{j=n+1}^{p} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} \gamma_j^{(i)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_i} \delta_j^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} \delta_j^{(i)} > 0, \tag{1.13}$$

$$(i = 1, \ldots, r)$$

जहाँ पर $n, p, q, n_i, m_i, p_i, q_i$ ऋणेत्तर पूर्णांक हैं इस प्रकार कि

$$0 \le n \le p, \quad q \ge 0, \quad 1 \le m_i \le q_i, \text{और}\, 0 \le n_i \le p_i, \quad (i = 1, \dots, r)$$

समीकरण (1.12) समिश्र चरों $z_1, \dots, z_r$ को उपयुक्त मानों के लिए सत्य है।

यह विदित है कि बहुचरीय H-फलन (1.7) को निरूपित करने वाला बहु मेलिन-बार्नीज कन्टूर समाकल [18, p. 251 (C.1)] परम रूप से अभिसारी होता है यदि प्रतिबंध (1.13) सत्य हो, जब

$$|\arg (z_i)| < \frac{1}{2}\pi\,\Omega_i, \ \{ i = 1, \dots, r \}, \tag{1.14}$$

बिन्दु $Z_i = (i = 1, \dots, r)$ और अन्य अपवादित प्राचलन मानों को आकथित रूप से छोड़ने पर। आगे भी [17, p. 131 (1.9)]:

$$H[z_1, \dots, Z_r] = \begin{cases} 0(|z_1|^{\xi_1} \dots, |z_r|^{\xi_1}), \max\{|z_1|, \dots |z_r|\} \to 0 \\ 0(|z_1|^{\eta_1} \dots, |z_r|^{\eta_r}), n = 0, \min\{|z_1|, \dots |z_r|\} \to \infty \end{cases} \tag{1.15}$$

जहाँ पर $(i = 1, \dots, r)$

$$\begin{cases} \xi_i = \min\left\{ Re\left(d_j^{(i)} \right) / \delta_j^{(i)} \right\}, \ (j = 1, \dots, m_i) \\ \eta_i = \max\left\{ Re\left(c_j^{(i)} - 1 \right) / \gamma_j^{(i)} \right\}, \ (j = 1, \dots, n_i) \end{cases} \tag{1.16}$$

बशर्ते प्रत्येक असमयिका (1.12) (1.13) और (1.14) सत्य हो।

यहाँ पर यह बताना उपयुक्त होगा कि इस प्रपत्र में आगे वाले अनुभागों में प्रयुक्त बहुचरीय H-फलन के अभिसरण एवं अस्तित्व प्रतिबंधों के लिए उपर्युक्त दिये गये संगत प्रतिबंध सत्य होंगे।

2. व्यापक आयलरी समाकल

हम इस अनुभाग में निम्न दो बहुचरीय H-फलनों के गुणन को अंतर्वलय करने वाला एक व्यापक आयलरी समाकल ज्ञात करेंगे–

$$\int_a^b (t - a)^{\alpha - 1} (b - t)^{\beta - 1} (ut + \upsilon)^{\gamma} (yt + z)^{\delta}$$

$$\times H\left[z_1(ut+\upsilon)^{\sigma_1},\ldots,z_r(ut+\upsilon)^{-\sigma_r}\right]$$

$$\times H^*\left[z_1(yt+z)^{\lambda_1},\ldots,z_s(yt+z)^{\lambda_1}\right]dt$$

$$= (b-a)^{\alpha+\beta-1}\, B(\alpha,\beta)\,(au+\upsilon)^{\gamma}\,(by+z)^{\delta}$$

$$\times \sum_{l,m=o}^{\infty} \frac{(\alpha)_l\,(\beta)_m}{(\alpha+\beta)_{l+m}\, l!\, m!} \times \{(b-a)\,u/au+\upsilon\}^{l}\ \{-(b-a)\,y/by+z\}^{\mathrm{m}}$$

$$\times H^{0,\,n+1\,:\,m_1,\,n_1;\,\ldots;\,m_r,\,n_r}_{p+1,\,q+1\,:\,p_1,\,q_1;\,\ldots;\,p_r,\,q_r}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1(au+\upsilon)^{\sigma_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r(au+\upsilon)^{\sigma_r}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}\left(-\gamma;\sigma_1,\ldots,\sigma_r\right),\left(a_j;\alpha_j^1,\ldots,\alpha_j^{(r)}\right)_{1,p}: \\ \\ \left(-\gamma+l;\sigma_1,\ldots,\sigma_r\right),\left(b_j;\beta_j^1,\ldots,\beta_j^{(r)}\right)_{1,q}:\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}\left(c_j^1,\gamma_j^1\right)_{1,p_1};\ldots;\left(c_j^{(r)},\gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(d_j^1,\delta_j^1\right)_{1,q_1};\ldots;\left(d_j^{(r)},\delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r}\end{matrix}\right].$$

$$\times H^{0,\,N+1\,:\,M_1,\,N_1;\,\ldots;\,M_s,\,N_s}_{p+1,\,Q+1\,:\,P_1,\,Q_1;\,\ldots;\,P_s,\,Q_s}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1(by+z)\lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_s(by+z)^{\lambda_s}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}\left(-\delta;\lambda_1,\ldots,\lambda_s\right),\left(-g_j;G_j^1,\ldots,G_j^{(s)}\right)_{1,P}: \\ \\ \left(-\delta+m;\lambda_1,\ldots,\lambda_s\right),\left(h_j;H_j^1,\ldots,H_j^{(s)}\right)_{1,Q}:\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}\left(u_j^1,U_j^1\right)_{1,P_1};\ldots;\left(u_j^{(s)},U_j^{(s)}\right)_{1,P_s} \\ \left(v_j^1,V_j^1\right)_{1,Q_1};\ldots;\left(v_j^{(s)},V_j^{(s)}\right)_{1,Q_s}\end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

बशर्ते (पूर्व में दिये गये अभिसरण एवं अस्तित्व प्रतिबंधों सहित)

$$\min\left\{\sigma_i,\ \lambda_j\right\} > 0\,;\ (i = 1, \ldots, r\,;\ j = 1, \ldots, s);\ b \neq a;$$

$$\min\left\{\operatorname{Re}(\alpha),\ \operatorname{Re}(\beta)\right\} > 0;\ \max\left\{\left|\frac{(b-a)u}{au+\upsilon}\right|,\ \left|\frac{(b-a)y}{by+z}\right|\right\} < 1;$$

$$\operatorname{Re}(\delta) + \sum_{k=1}^{s}\lambda_k\,\eta_k > -1;\left(\eta_k = \min\left\{\operatorname{Re}\left(\upsilon_j^{(k)}\right)/v_j^{(k)}\right\}, j = 1, \ldots, M_k\right)$$

जहाँ पर,

$$H^*\left[\,z_1\,(yt+z)^{\lambda_1}, \ldots, z_s\,(yt+z)^{\lambda_s}\right],$$

S-चरों वाला एक *H*-फलन है बगैर $(-\,\delta\,;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, $(-\,\delta + m\,;\ \lambda, \ldots, \lambda_s)$प्राचलों के और दांये पक्ष में यह S-चरों वाला H-फलन इन प्राचलों सहित है।

उपपत्ति—बाम पक्ष में सर्वप्रथम H-फलन को उसके बहु मेलिन-बार्नीज कन्टूर समाकल [18, p. 251 (C.1)] द्वारा विस्थापित करने, *t* की घातों को एकत्रित करने और द्विपद प्रसार (1.3) का प्रयोग करने के पश्चात् (1.2) का प्रयोग करने पर और अंत में प्राप्त बहुमेलिन-बार्नीज कन्टूर समाकल को बहुचरीय H-फलन में निरूपित करने पर हमें वांछित सूत्र (2.1) की प्राप्ति होती है।

3. अनुप्रयोग

व्यापक आयलरी समाकल सूत्र (2.1) अनेक व्यापकता वाला होता है। इन सूत्रों में शामिल अनेक प्राचलों और चरों का विशेषीकरण करने एवं उनका उपयुक्त प्रयोग करके आश्चर्यजनक रूप से अनेक उपयोगी फलनों (या इन फलनों के गुणन) जैसे F, F, G, H-फलनों एक या दो या बहु चरों के फलनों में बहुत सारे, संबंधों को प्राप्त किया जा सकता है। (सूत्रों के घातांकों का भी विशेषीकरण इस प्रकार करने पर की प्राप्त समीकरण सत्य हो अनेक सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं) जैसे यदि n = p = q= 0 लें तो सूत्रों में शामिल में शामिल बहुचरीय सर्वीकृत H-फलन तुरन्त r भिन्न-भिन्न फाक्स के H-फलन में टूट जाता है। फाक्स के H-फलन को कई सरल फलनों में परिवर्तित करने के सूत्रों के लिए मथाई तथा सक्सेना की पुस्तक [2, p 145-159] को देखा जा सकता है। इस प्रकार सूत्र (2.1) से अनेक सरल फलनों वाले आयलरी समाकल सूत्र ज्ञात किये जा सकते हैं जो अपने आप में व्यापक सूत्र होंगे।

(i) (2.1) में; a, y को क्रमशः (-a), (-y) से विस्थापित करने पर (साथ ही कौशलपूर्वक हल करने पर) हमें निम्न सूत्र प्राप्त होता है :

$$\int_{-a}^{b} (t+a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} (ut+\upsilon)^{\gamma} (z-ty)^{\delta}$$

$$\times H\Big[z_1 (ut+\upsilon)^{\sigma_1}, \ldots, z_r (ut+\upsilon)^{\sigma_r} \Big]$$

$$\times H^{*}\Big[z_1 (z-ty)^{\lambda_1}, \ldots, z_s (z-ty)^{\lambda_s} \Big] dt$$

$$= (a+b)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) (bu+\upsilon)^{\gamma} (ay+z)^{\delta}$$

$$\times \sum_{l, m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_l}{l!\, m!\, (\alpha+\beta)_{l+m}} \times \left\{ -\frac{(a+b)_u}{bu+\upsilon} \right\}^{l} \left\{ -\frac{(a+b)_y}{ay+z} \right\}^{m}$$

$$\times H^{0,\, n+1\, :\, m_1,\, n_1\, ;\, \ldots\, ;\, m_r,\, n_r}_{p+1,\, q+1\, :\, p_1,\, q_1\, ;\, \ldots\, ;\, p_r,\, q_r}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1 (bu+\upsilon)^{\sigma_1} \\ \vdots \\ z_r (bu+\upsilon)^{\sigma_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(-\gamma; \sigma_1, \ldots, \sigma_r\right), \left(a_j;\, \alpha_j^{1}, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \\ \\ \left(-\gamma + l;\, \sigma_1, \ldots, \sigma_r\right), \left(b_j;\, \beta_j^{1}, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(c_j^{1}, \gamma_j^{1}\right)_{1,p_1}; \ldots; \left(c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(d_j^{1}, \delta_j^{1}\right)_{1,q_1}; \ldots; \left(d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix} \right].$$

$$\times H^{0,\, N+1\, :\, M_1,\, N_1\, ;\, \ldots\, ;\, M_s,\, N_s}_{p+1,\, Q+1\, :\, P_1,\, Q_1\, ;\, \ldots\, ;\, P_s,\, Q_s}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1 (ay+z)\lambda_1 \\ \vdots \\ z_s (ay+z)^{\lambda_s} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(-\delta;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_s\right), \left(g_j;\, G_j^{1}, \ldots, G_j^{(s)}\right)_{1,P} : \\ \\ \left(-\delta + m;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_s\right), \left(h_j;\, H_j^{1}, \ldots, H_j^{(s)}\right)_{1,Q} : \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(u_j^1,\ U_j^1\right)_{1,P_1};\dots;\left(u_j^{(s)},\ U_j^{(s)}\right)_{1,P_s} \\ \left(v_j^1,\ V_j^1\right)_{1,Q_1};\dots;\left(v_j^{(s)},\ V_j^{(s)}\right)_{1,Q_s} \end{matrix} \right] \tag{3.1}$$

बशर्ते (पूर्व में दिये-गये अभिसरण एवं अस्तित्व प्रतिबन्धों सहित)

$$\min\left\{\sigma_i,\ \lambda_j\right\} > 0;\ (i = 1,\dots,r;\ j = 1,\dots,s);\ b + a \neq 0;$$

$$\max\left\{\left|\frac{(a+b)u}{bu+\upsilon}\right|,\ \left|\frac{(a+b)y}{ay+z}\right|\right\} < 1;\ \min\left\{\operatorname{Re}(\alpha),\ \operatorname{Re}(\beta)\right\} > 0;$$

$$\operatorname{Re}(\delta) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \eta_k > -1;\left(\eta_k = \min\left\{\operatorname{Re}\left(\upsilon_j^{(k)}\right)/v_j^{(k)}\right\}, j = 1,\dots,M_k\right)$$

(ii) (2.1) और (3.1) में σ_i, λ_j को क्रमशः $(-\sigma_i)$, $(-\lambda_j)$ से विस्थापित करने पर $(i = 1,\dots,r;\ j = 1,\dots,s)$ हमें निम्न सूत्रों की प्राप्ति होती है :

$$\int_a^b (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(ut+\upsilon)^{\gamma}(yt+z)^{\delta}$$

$$\times H\left[z_1(ut+\upsilon)^{-\sigma_1},\dots,z_r(ut+\upsilon)^{-\sigma_r}\right]$$

$$\times H^*\left[z_1(yt+z)^{-\lambda_1},\dots,z_s(yt+z)^{-\lambda_s}\right]dt$$

$$= (b-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta)(au+\upsilon)^{\gamma}(by+z)^{\delta}$$

$$\times \sum_{l,m=o}^{\infty} \frac{(\alpha)_l(\beta)_m}{l!\,m!\,(\alpha+\beta)_{l+m}} \times \left\{-\frac{(b-a)_u}{au+\upsilon}\right\}^l \left\{\frac{(b-a)_y}{by+z}\right\}^m$$

$$\times H^{0,\ n+1\ :\ m_1,\ n_1;\dots;m_r,\ n_r}_{p+1,\ q+1\ :\ p_1,\ q_1;\dots;p_r,\ q_r}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1(au+\upsilon)^{-\sigma_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r(au+\upsilon)^{-\sigma_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(1+\gamma-l;\sigma_1,\ldots,\sigma_r\right), \left(a_j;\alpha_j^1,\ldots,\alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \\ \\ \left(1+\gamma;\sigma_1,\ldots,\sigma_r\right), \left(b_j;\beta_j^1,\ldots,\beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(c_j^1,\gamma_j^1\right)_{1,p_1};\ldots;\left(c_j^{(r)},\gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(d_j^1,\delta_j^1\right)_{1,q_1};\ldots;\left(d_j^{(r)},\delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix} \right].$$

$$\times H^{0,\,N+1\,:\,M_1,\,N_1;\ldots;M_s,\,N_s}_{p+1,\,Q+1\,:\,P_1,\,Q_1;\ldots;P_s,\,Q_s}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1(by+z)^{-\lambda_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_s(by+z)^{-\lambda_s} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(1+\delta-m;\lambda_1,\ldots,\lambda_s\right), \left(g_j;G_j^1,\ldots,G_j^{(s)}\right)_{1,P} : \\ \\ \left(1-\delta;\lambda_1,\ldots,\lambda_s\right), \left(h_j;H_j^1,\ldots,H_j^{(s)}\right)_{1,Q} : \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(u_j^1,U_j^1\right)_{1,P_1};\ldots;\left(u_j^{(s)},U_j^{(s)}\right)_{1,P_s} \\ \left(v_j^1,V_j^1\right)_{1,Q_1};\ldots;\left(v_j^{(s)},V_j^{(s)}\right)_{1,Q_s} \end{matrix} \right] \tag{3.2}$$

$$\int_{-a}^{b} (t+a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} (ut+\upsilon)^{\gamma} (z-yt)^{\delta}$$

$$\times H\left[z_1(ut+\upsilon)^{-\sigma_1}, \ldots, z_r(ut+\upsilon)^{-\sigma_r} \right]$$

$$\times H^*\left[z_1(z+yt)^{-\lambda_1}, \ldots, z_s(z-yt)^{-\lambda_s} \right] dt$$

$$= (a+b)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) (bu+\upsilon)^{\gamma} (ay+z)^{\delta}$$

$$\times \sum_{l,m=o}^{\infty} \frac{(\alpha)_l\,(\beta)_m}{l!\,m!\,(\alpha+\beta)_{l+m}} \times \left\{\frac{(a+b)_u}{bu+\upsilon}\right\}^l \left\{\frac{(a+b)_y}{ay+z}\right\}^m$$

$$\times H^{0,\,n+1\,:\,m_1,\,n_1;\,\dots;\,m_r,\,n_r}_{p+1,\,q+1\,:\,p_1,\,q_1;\,\dots;\,p_r,\,q_r}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1(bu+\upsilon)^{-\sigma_1} \\ \vdots \\ z_r(bu+\upsilon)^{-\sigma_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(1+\gamma-l;\sigma_1,\dots,\sigma_r\right),\left(a_j;\alpha_j^1,\dots,\alpha_j^{(r)}\right)_{1,p}: \\ \\ \left(1+\gamma;\sigma_1,\dots,\sigma_r\right),\left(b_j;\beta_j^1,\dots,\beta_j^{(r)}\right)_{1,q}: \end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix} \left(c_j^1,\gamma_j^1\right)_{1,p_1};\dots;\left(c_j^{(r)},\gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(d_j^1,\delta_j^1\right)_{1,q_1};\dots;\left(d_j^{(r)},\delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix}\right].$$

$$\times H^{0,\,N+1\,:\,M_1,\,N_1;\,\dots;\,M_s,\,N_s}_{p+1,\,Q+1\,:\,P_1,\,Q_1;\,\dots;\,P_s,\,Q_s}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1(ay+z)-\lambda_1 \\ \vdots \\ z_s(ay+z)^{-\lambda_s} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(1+\delta-m;\lambda_1,\dots,\lambda_s\right),\left(g_j;G_j^1,\dots,G_j^{(s)}\right)_{1,P}: \\ \\ \left(1-\delta;\lambda_1,\dots,\lambda_s\right),\left(h_j;H_j^1,\dots,H_j^{(s)}\right)_{1,Q}: \end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix} \left(u_j^1,U_j^1\right)_{1,P_1};\dots;\left(u_j^{(s)},U_j^{(s)}\right)_{1,P_s} \\ \left(v_j^1,V_j^1\right)_{1,Q_1};\dots;\left(v_j^{(s)},V_j^{(s)}\right)_{1,Q_s} \end{matrix}\right] \tag{3.3}$$

सूत्र (3.2) एवं (3.3) के अभिसरण एवं अस्तित्व प्रतिबंधों को उनके मूल सूत्रों (2.1 एवं (3.1) से सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

(iii) (3.2), (3.3) में, $n = p;\ n_1 = p_1, \dots, n_r = p_r;\ m_1 = \dots = m_r = 1$ रखने; $q_1, q_2, \dots, q_r$ में गामा खण्डों (Gamma factors) को इस प्रकार रखने पर कि वे 1 से q_1 से $q_r, \dots, 1$ से हो जाये; अंशों (numerators) में सूत्र [9, p. 32 (9)] का प्रयोग करने पर तथा $\delta_1^1 = \delta_1^{11} = \dots = \delta_1^{(r)} = 1$ रखने और अन्त में $(1-a_j), (1-b_j), (1-c_j), (1-d_j), -z's$ को क्रमशः a_j, b_j, c_j, d_j, द्वारा विस्थापित

करने पर हमें बहुचरीय सार्वीकृत लारीसेला फलनों (श्रीवास्तव-दाओस्त) 18, p. 251 (C. 9) साथ ही 12, p. 454] को अंतर्वलय करने वाला निम्न आयलरी समाकल प्राप्त होता है।

$$\int_a^b (t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\beta-1}(ut+\upsilon)^{\gamma}(yt+z)^{\delta} \times F^{p\,:\,p_1;\ldots;p_r}_{q\,:\,q_1;\ldots;q_r,}\begin{pmatrix} z_1(ut+\upsilon)^{-\sigma_1} \\ \vdots \\ z_r(ut+\upsilon)^{-\sigma_r}\end{pmatrix} \times F^{P\,:\,P_1;\ldots;P_r}_{Q\,:\,Q_1;\ldots;Q_s,}\begin{pmatrix} z_1(yt+z)^{-\lambda_1} \\ \vdots \\ z_s(yt+z)^{-\lambda_r}\end{pmatrix}$$

$$= (b-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha-\beta)(au+\upsilon)^{\gamma}(by+z)^{\delta}$$

$$\times F^{p+1\,:\,p_1;\ldots;p_r;\,1}_{q+1\,:\,q_1;\ldots;q_r;\,1}\left(\begin{matrix}\left(-\gamma;\sigma_1,\ldots,\sigma_r;\,1\right),\left(a_j;\,\alpha_j^1,\ldots,\alpha_j^{(r)},\,0\right)_{1,p}: \\ \left(-\gamma+\sigma_1,\ldots,\sigma_r,\,0\right),\left(b_j;\,\beta_j^1,\ldots,\beta_j^{(r)},\,0\right)_{1,q}:\end{matrix}\right.$$

$$\times\begin{matrix}\left(c_j^1,\gamma_j^1\right)_{1,p_1};\ldots;\left(c_j^{(r)},\gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r};\,(\alpha,1); \\ \left(d_j^1,\delta_j^1\right)_{1,q_1};\ldots;\left(d_j^{(r)},\delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r};\,(\alpha+\beta,1);\end{matrix}$$

$$\left. z_1(au+\upsilon)^{-\sigma_1},\ldots,z_r(au+\upsilon)^{-\sigma_r},\,-\frac{(b-a)u}{au+\upsilon}\right)$$

$$\times F^{P+1\,:\,P_1;\ldots;P_s;\,1}_{Q+1\,:\,Q_1;\ldots;Q_s,\,1}\left(\begin{matrix}\left(-\delta;\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\,1\right),\left(g_j;\,G_j^1,\ldots,G_j^{(s)},\,0\right)_{1,P}: \\ \left(-\delta;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\,0\right),\left(h_j;\,H_j^1,\ldots,H_j^{(s)},\,0\right)_{1,Q}:\end{matrix}\right.$$

$$\times\begin{matrix}\left(u_j^1,U_j^1\right)_{1,P_1};\ldots;\left(u_j^{(s)},U_j^{(s)}\right)_{1,P_s};\,(\beta,1); \\ \left(v_j^1,V_j^1\right)_{1,Q_1};\ldots;\left(v_j^{(s)},V_j^{(s)}\right)_{1,Q_s};\,(\alpha+\beta+l,1);\end{matrix}$$

$$\left. z_1(by+z)^{-\lambda_1},\ldots,z_s(by+z)^{-\lambda_s},\,\frac{(b-a)y}{by+z}\right) \qquad (3.4)$$

$$\int_{-a}^{b} (t+a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} (ut+\upsilon)^{\gamma} (z-ty)^{\delta}$$

$$\times F^{p\,:\,p_1;\ldots;p_r}_{q\,:\,q_1;\ldots;q_r,}\begin{pmatrix} z_1(ut+\upsilon)^{-\sigma_1} \\ \vdots \\ z_r(ut+\upsilon)^{-\sigma_r}\end{pmatrix} \times F^{P\,:\,P_1;\ldots;P_s}_{Q\,:\,Q_1;\ldots;Q_s,}\begin{pmatrix} z_1(z-ty)^{-\lambda_1} \\ \vdots \\ z_s(z-ty)^{-\lambda_s}\end{pmatrix} dt$$

$$= (b+a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta)\, (bu+\upsilon)^{\gamma} (ay+z)^{\delta}$$

$$\times F^{p+1\,:\,p_1;\ldots;p_r;\,1}_{q+1\,:\,q_1;\ldots;q_r;\,1}\left(\begin{matrix} \left(-\gamma;\sigma_1,\ldots,\sigma_r;\,1\right), \left(a_j;\,\alpha_j^1,\ldots,\alpha_j^{(r)},\,0\right)_{1,p} : \\ \left(-\gamma+\sigma_1,\ldots,\sigma_r,\,0\right), \left(b_j;\,\beta_j^1,\ldots,\beta_j^{(r)},\,0\right)_{1,q} : \end{matrix}\right.$$

$$\times \begin{matrix} \left(c_j^1,\,\gamma_j^1\right)_{1,p_1};\ldots;\left(c_j^{(r)},\,\gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r};\,(\beta,\,1); \\ \left(d_j^1,\,\delta_j^1\right)_{1,q_1};\ldots;\left(d_j^{(r)},\,\delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r}:\,(\alpha+\beta,\,1); \end{matrix}$$

$$\left. z_1(bu+\upsilon)^{-\sigma_1},\ldots,z_r(bu+\upsilon)^{-\sigma_r},\,\frac{(b+a)u}{bu+\upsilon}\right)$$

$$\times F^{P+1\,:\,P_1;\ldots;P_s;\,1}_{Q+1\,:\,Q_1;\ldots;Q_s,\,1}\left(\begin{matrix} \left(-\delta;\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\,1\right), \left(g_j;\,G_j^1,\ldots,G_j^{(s)},\,0\right)_{1,P} : \\ \left(-\delta;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\,0\right), \left(h_j;\,H_j^1,\ldots,H_j^{(s)},\,0\right)_{1,Q} : \end{matrix}\right.$$

$$\times \begin{matrix} \left(u_j^1,\,U_j^1\right)_{1,P_1};\ldots;\left(u_j^{(s)},\,U_j^{(s)}\right)_{1,P_s};\,(\alpha,\,1); \\ \left(v_j^1,\,V_j^1\right)_{1,Q_1};\ldots;\left(v_j^{(s)},\,V_j^{(s)}\right)_{1,Q_s};\,(\alpha+\beta+l,\,1); \end{matrix}$$

$$\left. z_1(ay+z)^{-\lambda_1},\ldots,z_s(ay+z)^{-\lambda_s},\,\frac{(b+a)v}{ay+z}\right) \tag{3.5}$$

(iv) प्रत्येक आयलरी समाकलों (2.1), (3.1) - (3.5) में $b = x$ $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ लेने पर, उनको सहजता से निम्न भिन्नात्मक समाकलों ((1.5) में परिभाषित भिन्नात्मक संकारक ${}_{\alpha}D_x^{\mu}$ को रखने वाले) में परिवर्तित किया जा सकता है :

$$
\begin{aligned}
&{}_aD_x^{-\alpha}\Big\{(x-a)^{\beta-1}(ux+v)^{\gamma}(yx+z)^{\delta}\\
&\times H\Big[z_1(ux+\upsilon)^{\sigma_1},\dots,z_r(ux+\upsilon)^{\sigma_r}\Big]\\
&\times H^*\Big[z_1(xy+z)^{\lambda_1},\dots,z_s(xy+z)^{\lambda_s}\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(x-a)^{\alpha+\beta-1}(au+v)^{\gamma}(xy+z)^{\delta}\\
&\times\sum_{l_1,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m\,\Gamma(\beta+l)}{l!\,m!\,\Gamma(\alpha+\beta+l+m)}\times\left\{\frac{(x-a)u}{au+v}\right\}^{l}\left\{\frac{(x-a)y}{xy+z}\right\}^{m}\\
&\times H^{0,\,n+1\,:\,m_1,\,n_1;\,\dots;\,m_r,\,n_r}_{p+1,\,q+1\,:\,p_1,\,q_1;\,\dots;\,p_r,\,q_r}\times\begin{bmatrix} z_1(au+\upsilon)^{\sigma_1}\\ \vdots\\ z_r(au+\upsilon)^{\sigma_r}\end{bmatrix}\\
&\times H^{0,\,N+1\,:\,M_1,\,N_1;\,\dots;\,M_s,\,N_s}_{p+1,\,Q+1\,:\,P_1,\,Q_1;\,\dots;\,P_s,\,Q_s}\begin{bmatrix} z_1(xy+z)^{\lambda_1}\\ \vdots\\ z_s(xy+z)^{\lambda_s}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}_{-a}D_x^{-\alpha}\Big\{(x+a)^{\beta-1}(ux+v)^{\gamma}(z-xy)^{\delta}\\
&\times H\Big[z_1(xu+\upsilon)^{\sigma_1},\dots,z_r(xu+\upsilon)^{\sigma_r}\Big]\\
&\times H^*\Big[z_1(z-xy)^{\lambda_1},\dots,z_s(z-xy)^{\lambda_s}\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$= (x + a)^{\alpha+\beta-1} (xu + v)^{\gamma} (ay + z)^{\delta}$$

$$\times \sum_{l_1, m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_l \, \Gamma(\beta + m)}{l\,!\, m\,!\, \Gamma(\alpha + \beta + l + m)} \times \left\{ - \frac{(x + a)u}{xu + v} \right\}^l \left\{ - \frac{(x + a)y}{ay + z} \right\}^m$$

$$\times H^{0,\, n+1\, :\, m_1,\, n_1\, ;\, \ldots\, ;\, m_r,\, n_r}_{p+1,\, q+1\, :\, p_1,\, q_1\, ;\, \ldots\, ;\, p_r,\, q_r} \left[\begin{matrix} z_1 (xu + \upsilon)^{\sigma_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r (xu + \upsilon)^{\sigma_r} \end{matrix} \right]$$

$$\times H^{0,\, N+1\, :\, M_1,\, N_1\, ;\, \ldots\, ;\, M_s,\, N_s}_{p+1,\, Q+1\, :\, P_1,\, Q_1\, ;\, \ldots\, ;\, P_s,\, Q_s} \left[\begin{matrix} z_1 (ay + z)^{\lambda_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_s (ay + z)^{\lambda_s} \end{matrix} \right] \tag{3.7}$$

$${}_a D_x^{-\alpha} \Big\{ (x - a)^{\beta-1} (ux + v)^{\gamma} (zy + z)^{\delta}$$

$$\times H\Big[z_1 (ux + \upsilon)^{-\sigma_1}, \ldots, z_r (ux + \upsilon)^{-\sigma_r} \Big]$$

$$\times H^{*}\Big[z_1 (xy + z)^{-\lambda_1}, \ldots, z_s (xy + z)^{-\lambda_s} \Big] \Big\}$$

$$= (x - a)^{\alpha+\beta-1} (au + v)^{\gamma} (xy + z)^{\delta}$$

$$\times \sum_{l_1, m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m \, \Gamma(\beta + l)}{l\,!\, m\,!\, \Gamma(\alpha + \beta + l + m)} \times \left\{ - \frac{(x + a)u}{au + v} \right\}^l \left\{ \frac{(x - a)y}{xy + z} \right\}^m$$

$$\times H^{0,\, n+1\, :\, m_1,\, n_1\, ;\, \ldots\, ;\, m_r,\, n_r}_{p+1,\, q+1\, :\, p_1,\, q_1\, ;\, \ldots\, ;\, p_r,\, q_r} \left[\begin{matrix} z_1 (au + \upsilon)^{-\sigma_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r (au + \upsilon)^{-\sigma_r} \end{matrix} \right]$$

$$\times H^{0,\, N+1\,:\, M_1,\, N_1;\,\ldots;\,M_s,\, N_s}_{p+1,\, Q+1\,:\, P_1,\, Q_1;\,\ldots;\,P_s,\, Q_s}\begin{bmatrix} z_1(xy+z)^{-\lambda_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_s(xy+z)^{-\lambda_s}\end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

$$ {}_{-a}D_x^{-\alpha}\left\{(x+a)^{\beta-1}(ux+v)^{\gamma}(z-xy)^{\delta}\right.$$

$$\times H\left[z_1(xu+\upsilon)^{-\sigma_1},\ldots,z_r(ux+\upsilon)^{-\sigma_r}\right]$$

$$\left.\times H^*\left[z_1(z-xy)^{-\lambda_1},\ldots,z_s(z-xy)^{-\lambda_s}\right]\right\}$$

$$= (x+a)^{\alpha+\beta-1}(xu+v)^{\gamma}(ay+z)^{\delta}$$

$$\times \sum_{l_1,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_l\,\Gamma(\beta+m)}{l!\,m!\,\Gamma(\alpha+\beta+l+m)}\times\left\{\frac{(x+a)u}{xu+v}\right\}^{l}\left\{\frac{(x+a)y}{ay+z}\right\}^{m}$$

$$\times H^{0,\, n+1\,:\, m_1,\, n_1;\,\ldots;\,m_r,\, n_r}_{p+1,\, q+1\,:\, p_1,\, q_1;\,\ldots;\,p_r,\, q_r}\begin{bmatrix} z_1(xu+\upsilon)^{-\sigma_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r(xu+\upsilon)^{-\sigma_r}\end{bmatrix}$$

$$\times H^{0,\, N+1\,:\, M_1,\, N_1;\,\ldots;\,M_s,\, N_s}_{p+1,\, Q+1\,:\, P_1,\, Q_1;\,\ldots;\,P_s,\, Q_s}\begin{bmatrix} z_1(ay+z)^{-\lambda_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_s(ay+z)^{-\lambda_s}\end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

$$ {}_{a}D_x^{-\alpha}\left\{(x-a)^{\beta-1}(ux+v)^{\gamma}(xy+z)^{\delta}\right.$$

$$\left.\times F^{p\,:\,p_1;\,\ldots;\,p_r}_{q\,:\,q_1;\,\ldots;\,q_r}\begin{pmatrix} z_1(ux+\upsilon)^{-\sigma_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r(ux+\upsilon)^{-\sigma_r}\end{pmatrix}\times F^{P\,:\,P_1;\,\ldots;\,P_s}_{Q\,:\,Q_1;\,\ldots;\,Q_s,}\left(\begin{pmatrix} z_1(xy+z)^{-\lambda_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_s(xy+z)^{-\lambda_s}\end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$= (x-a)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (au+\upsilon)^{\gamma} (xy+z)^{\delta}$$

$$\times F^{p+1\,:\,p_1;\ldots;p_r;\,1}_{q+1\,:\,q_1;\ldots;q_r;\,1}\left(z_1(au+v)^{-\sigma_1},\ldots,z_r au+v)^{-\sigma_r},-\frac{(x-a)u}{au+v}\right)$$

$$\times F^{P+1\,:\,P_1;\ldots;P_s;\,1}_{Q+1\,:\,Q_1;\ldots;Q_s.\,1}\left(z_1(xu+z)^{-\lambda_1},\ldots,z_s xy+z)^{-\lambda_s},\frac{(x-a)y}{xy+z}\right) \quad (3.10)$$

$${}_{-a}D_x^{-\alpha}\Big\{(x+a)^{\beta-1}(ux+v)^{\gamma}(z-xy)^{\delta}$$

$$\times F^{p\,:\,p_1;\ldots;p_r}_{q\,:\,q_1;\ldots;q_r}\begin{pmatrix} z_1(ux+\upsilon)^{-\sigma_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r(ux+\upsilon)^{-\sigma_r} \end{pmatrix} \times F^{P\,:\,P_1;\ldots;P_s}_{Q\,:\,Q_1;\ldots;Q_s,}\begin{pmatrix} z_1(z-xy)^{-\lambda_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_s(z-xy)^{-\lambda_s} \end{pmatrix}\Bigg\}$$

$$= (x+a)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (ux+\upsilon)^{\gamma} (xy+z)^{\delta}$$

$$\times F^{p+1\,:\,p_1;\ldots;p_r;\,1}_{q+1\,:\,q_1;\ldots;q_r;\,1}\left(z_1(xu+v)^{-\sigma_1},\ldots,z_r(xu+v)^{-\sigma_r},-\frac{(x+a)u}{xu+v}\right)$$

$$\times F^{P+1\,:\,P_1;\ldots;P_s;\,1}_{Q+1\,:\,Q_1;\ldots;Q_s.\,1}\left(z_1(ay+z)^{-\lambda},\ldots,z_s(ay+z)^{-\lambda_s},\frac{(x+a)y}{axy+z}\right)$$

जहाँ पर (3.6) – (3. 11) सूत्रों में प्रयुक्त बहुचरीय फलनों में ठीक वही प्राचल हैं जो क्रमशः (2.1), 3.1) - (3.5) दाँयें पक्ष में लिये गये हैं। सूत्रों (3.2) - (3.11) के वैधता प्रतिबंधों को सरलता से उनके मूल सूत्रों से ज्ञात किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक यू० जी० के प्रति अपना आभार व्यक्त करता है जहाँ से लेखक को इस शोधन परियोजना के रूप में वित्तीय सहायता मिली।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए. : Tables of Integral Transforms, Vol. II, McGraw-Hill, N.Y. (1954).

2. मथाई, ए. एम. तथा सक्सेना, आर. के., : Generalized Hypergeomatric Functions with application in Statistics and Physical Sciences, Springer, Berlin (1973).

3. मैकब्रिज, ए. सी. तथा रोश, जी. एफ. : Fractional Calculus, Pitman Advanced Publishing Program, Boston (1985).

4. मिलर, के. एस. तथा रॉस, बी. : An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Willey & Sons, N.Y. (1993).

5. निशिमोटो, के. : Fractional Calculus, Vol. I-IV, Descartes Press, Koriyama (1984, 87, 89 and 1991).

6. निशिमोटो, के. : Fractional Calculus and its Applications, College of Engineering, Nihon Univ, Koriyama (1990).

7. ओल्धम, के. बी. तथा स्पेनियर, जे. : Fractional Calculus : The theory and applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Academic Press, N.Y. (1974).

8. प्रुडनिकोव, ए. पी. ब्राइकोव, ब्राइकोव, वाई. ए. तथा मेरीकोव, ओ. आई. : Integrals and Series of Elementary Functions (in Russian), Nauka, Moscow (1981).

9. रेनविले, ई. डी. : Special Functions, MacMillan & Co. Ltd. N.Y. (1969).

10. सक्सेना, आर. के. तथा निशिमाटो के. : J. Fractional Calculus, 1994, 6, 65-75.

11. सॉमको, एसत्रजीत्र किलबॉस, ए. ए. तथा मेरीकोव ओ. आई : Integrals and Derivative of Fractional Order and some of their Application, Nauka, 2 Tekhinika, Minsk (1987).

12. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा दाओस्त, एम. सी., : Nederl. Akad Wetensch Indag. Math. 1969, 31, 449-447.

13. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा दाओस्त, एम. सी. :Math. Nachar, 1972, 53, 151-159.

14. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर. : Comment, Math. Univ. St. Paul, 1975, 24 (Fasc 2) 119-137.

15. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर. : Comment, Math. Univ. St. Paul, 1976, 25 (Fasc 2), 167-197.

16. श्रीवास्तव, एच. एम. और पंडा, आर. : J. Reine Angew. Math, 1976 , 283/284, 265-274.

17. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर. : J. Reine, Angew, Math, 1976, 288, 129-149.

18. श्रीवास्तव, एच. एम., गुप्ता, के. सी. तथा गोयल, एस. पी., : The H-Function of one and two variables with applications, South Asian Publishers, New Delhi (1982).

19. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा मनोचा, एच. एल. : A Treatise on Generating Functions, Halsted press (Ellis Harwood Ltd., Chichester) John Willey & Sons. N.Y. (1989).

20.श्रीवास्तव, एच. एम. तथा गोयल, एम. पी. : J. Math Anal, Appl. 1985, 112, 645-651.

21. श्रीवास्तव, एच, एम. तथा सेगो, एम. : J. Math. Anal Appl. 1987, 121, 325-369.

22.श्रीवास्तव, एच. एम. तथा बु शमै न, आर. जी. Theory & application of Convolution integral Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1972).

23. श्रीवास्तव, एच. एम., चन्देल, आर. सी. एस. तथा विश्वकर्मा, पी. के. : J. Math. Anal, Appl., 1994, 184, 560-572.

24. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा हुसैन, एम. ए. : Math Appl, 1965, 30 (9), 7385.

25. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : J. Indian Acad. Math., 1996, 18, 2, 225-239.

26. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : J. Indian Acad. Math., 1997, 19, 1, 47-58.

27. श्रीवास्तव, आर. : Some applications of fractional calculus in univalent functions fractional calculus and their application, (Edited by Shrivastava, H. M. and Owa, S.) p. 371-382, Halsted Press, John Willey & Sons, N.Y. (1989).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 4, October, 1998.

I-फलन का अध्ययन-*II*

विश्व मोहन व्यास तथा अर्जुन के० राठी

गणित विभाग, डूंगर महाविद्यालय, बीकानेर (राजस्थान)

[प्राप्त-जून 28, 1998]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन में फॉक्स के H-फलन के हाल ही में राठी[7] द्वारा सार्वीकरण I-फलन के लिए चार अवकलन सूत्र प्राप्त किये गये हैं। विशिष्ट दशाओं के रूप में हमें नायर[5, 6], देवड़ा तथा राठी[2] एवं गुप्ता तथा जैन[4] द्वारा किये गये ज्ञात सूत्र प्राप्त होते हैं।

Abstract

A study of *I*-function-*II* : *By* Vishwa Mohan Vyas and Arjun K. Rathie, Department of Mathematics, Dungar College, Bikaner (Rajasthan).

In this paper four differentiation formulae for the I-function, which is generalization of the Fox's H-function introduced recently by Rathie[7], have been obtained. The results earlier obtained by Nair[5,6], Devra and Rathie[2] and Gupta and Jain[4] follow as special cases of our main results.

1. प्रस्तावना

बहुचर्चित फाक्स[3] एवं ब्राक्समा[1] के H-फलन का सार्वीकरण हाल ही में राठी[7] ने I-फलन द्वारा किया जिसे निम्नवत् परिभाषित एवं अंकित किया जाएगा।

$$I_{p,q}^{m,n}\left[z \left| \begin{matrix} {}_1\left(\alpha_j, A_j; a_j\right)_p \\ {}_1\left(\beta_j, B_j; b_j\right)_q \end{matrix} \right.\right] = (2\pi i)^{-1} \int_L \theta(s) \, . \, z^s \, ds \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma^{b_j}(\beta_j - B_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma^{a_j}(1 - \alpha_j + A_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma^{b_j}(1 - \beta_j + B_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma^{a_j}(\alpha_j - A_j s)} \cdot z^s \, ds \tag{1.2}$$

जहाँ $\alpha_j (j = 1, 2, \ldots, p)$ तथा $\beta_j (j, 2, \ldots, q)$ संमिश्र संख्याएँ हैं तथा $A_j > 0, (j = 1, 2, \ldots, p)$ एवं $\beta_j > 0 \ (j = 1, 2, \ldots, q)$ व $a_j, (j = 1, 2, \ldots, p)$ एवं $b_j (j = 1, 2, \ldots, q)$ अपरिमेय मान ग्रहण करते हैं तथा मेलिन-बार्निज प्रकार का एक उपयुक्त कंटूर L है और प्राचल इस प्रकार संकुचित रहते हैं कि I-फलन सार्थक रहता है।

इसी प्रपत्र में राठी[7] ने यह भी दर्शाया है कि (1.1) के दाहिने पक्ष का समाकलन अभिसारी होता है जबकि $\theta > 0$ तथा $|arg\, z| < \theta\pi/2$ जहाँ

$$\theta = \sum_{j=1}^{m} B_j b_j - \sum_{j=m+1}^{q} B_j b_j + \sum_{j=1}^{n} A_j a_j - \sum_{j=n+1}^{p} A_j a_j \tag{1.3}$$

2. प्रमुख अवकलन सूत्र

इस खण्ड में I-फलन के लिए निम्नलिखित अवकलन सूत्र व्युत्पन्न किये गये हैं :

$$(Dx - C_1) \ldots (Dx - C_r)\left[x^{\mu} I_{p,q}^{m,n}\left[z x^h \left| \begin{matrix} {}_1\left(\alpha_j, A_j; a_j\right)_p \\ {}_1\left(\beta_j, B_j; b_j\right)_q \end{matrix} \right.\right]\right]$$

$$= x^{\mu} I_{p+r,q+r}^{m,n+r}\left[z x^h \left| \begin{matrix} {}_1\left(c_j - 1 - \mu, h; 1\right)_r, \ {}_1\left(\alpha_j, A_j; a_j\right)_p \\ {}_1\left(\beta_j, B_j; b_j\right)_q, \ {}_1\left(c_j - \mu, h; 1\right)_r \end{matrix} \right.\right] \tag{2.1}$$

जहाँ $h > 0$.

$$(xD - C_1) \ldots (xD - C_r)\left[x^{\mu} I_{p,q}^{m,n}\left[z x^h \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right]\right]$$

$$= x^{\mu} I_{p+r,q+r}^{m,n+r}\left[z x^h \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(c_j - \mu, h; 1)_r, \; {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q, \; {}_1(c_j + 1 - \mu, h; 1)_r \end{matrix}\right] \tag{2.2}$$

जहाँ $h > 0$.

$$(Dx^{d_r+1}) \ldots (Dx^{d_1+1})\left[x^{-c} I_{p,q}^{m,n}\left[z x^h \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right]\right]$$

$$= x^{-c+d_1+d_2+\ldots d_r} I_{p+r,q+r}^{m,n+r}\left[z x^h \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(-d_1 - d_2 - \ldots d_j + c - 1, h : 1)_r, \; {}_1(\alpha_j, A_j : a_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q, \; {}_1(-d_1 - d_2 - \ldots d_r + c, h : 1)_r \end{matrix}\right] \tag{2.3}$$

जहाँ $h > 0$.

$$(Dx^{d_r+1} D) \ldots (x^{d_1+1} D)\left[x^{-c} I_{p,q}^{m,n}\left[z x^h \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right]\right]$$

$$= x^{-c+d_1+d_2+\ldots d_r} I_{p+r,q+r}^{m,n+r}\left[z x^h \,\middle|\, \begin{matrix} (c, h; 1)(c, -d_1, h; 1) \ldots, (c - d_1 - d_2 - \ldots d_{r-1}, h; 1)_r, \; {}_1(\alpha_j, A_j; a_j)_p \\ {}_1(\beta_j, B_j; b_j)_q, (1 + c, h; 1)(1 + c - d_1, h; 1) \ldots, (1 + c - d_1 - d_2 - \ldots d_{r-1}, h; 1)_r \end{matrix}\right] \tag{2.4}$$

जहाँ $h > 0$.

3. उपपत्ति :

(2.1) को सिद्ध करने के लिए हम इसके बाएँ पक्ष को (1.1) में परिभाषित I-फलन की सहायता से मेलिन-बार्निज समाकलन के पदों में लिखकर व्यक्त करते हैं।

$$(Dx - c_1) \dots (Dx - c_r)\left[(2\pi i)^{-1} \int_L \theta(s) x^{\mu + hs} ds\right] \tag{3.1}$$

जहाँ $D \equiv d/dx$ तथा

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma^{b_j}(\beta_j - B_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma^{a_j}(1 - \alpha_j + A_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma^{bj}(1 - \beta_j + B_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma^{aj}(\alpha_j - A_j s)} \cdot z^s\, ds \tag{3.2}$$

एवं

$$f(Dx)x^{\alpha} = f(\alpha + 1)x^{\alpha} \tag{3.3}$$

समाकलन के अन्तर्गत पदों का (3.3) की सहायता से प्रचालन करने पर व्यजंक हो जाता है-

$$x^{\mu}(2\pi i)^{-1} \int_L (hs + \mu + 1 - c_1) \dots (hs + \mu + 1 - c_r)\, \theta(s) x^{hs} ds$$

अब

$$(hs + \mu - c_j + 1) \text{ को } \frac{\Gamma(hs + \mu - c_j + 2)}{\Gamma(hs + \mu - c_j + 1)},\ j = 1, 2, \dots, r \text{ लिखने पर}$$

के रूप में व्यक्त करने पर एवं (1.1) की सहायता से विवेचना करने पर हमें अभीष्ट परिणाम (2.1) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार (2.2) से (2.4) सिद्ध किये जा सकते हैं।

4. विशिष्ट दशाएँ :

1. सूत्र (2.1) से (2.4) में जब $a_j = 1$, $j = n + 1, \dots, p$ एवं $b_j = 1$, $j = 1, \dots, m$ लेने पर I-फलन संगत H-फलन में परिणत हो जाता है और हमें देवड़ा तथा राठी[2] द्वारा $\overline{H}$-फलन के संगत सूत्र प्राप्त होते हैं ।

2. सूत्र (2.1) व (2.2) में जब $a_j = 1$, j $1, \dots, p$ एवं $b_j = 1$, $j = 1, \dots, q$ लेने पर I-फलन

संगत *H*-फलन में परिणत हो जाता है और हमें नायर[5] द्वारा ज्ञात *H*-फलन के संगत अवकलन सूत्र प्राप्त होते हैं।

3. सूत्र (2.3) व (2.4) में यदि $a_j = 1, j = 1, \ldots, p$ एवं $b_j = 1, j = 1, \ldots, q$ लेने पर *I*-फलन संगत *H*-फलन में परिणत हो जाता है और हमें नायर[6] द्वारा ज्ञात *H*-फलन के संगत अन्य अवकलन सूत्र प्राप्त होते हैं।

4. सूत्र (2.1) व (2.2) में जब $a_j = 1, j = 1, \ldots, p$ एवं $b_j = 1, j = 1, \ldots, q$ तथा $c_1 = c_2 = c_3 =, \ldots = c_r = 0$ लेने पर *I*-फलन संगत ज्ञात *H*-फलन में परिणत हो जाता है और हमें गुप्ता तथा जैन[4] द्वारा पूर्व में ज्ञात *H*-फलन के लिए अवकलन सूत्र प्राप्त होते हैं।

इसी प्रकार प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें कई विशिष्ट अवस्थाएँ प्राप्त होती हैं, परन्तु स्थानाभाव के कारण हम उन्हें यहाँ नहीं दे पा रहे हैं।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी. एल. जे. : कम्पोजितो मैथ, 1963 : 15, 239-341
2. देवड़ा, एच. एम. तथा राठी, ए. के. : विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 1993 : 36(2), 107-113.
3. फॉक्स, सी. : ट्रांजै अमे. मैथ. सोसा., 1961, 98, 359-429.
4. गुप्ता, के. सी. तथा जैन, यू. सी. : प्रोसी. नेश एके. साइंस, ई. 1968 : 38, 189-192.
5. नायर, बी. सी. : मैथ स्टूडेन्ट, 1972 : 10, 74-78.
6. नायर, वी. सी. : इण्डियन मैथ., सोसा. : 1973 : 37, 329-334.
7. राठी, ए. के. : ली. मैथ., (केटनिया) : 1997 : 52, 297-310.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 4, October, 1998.

इक्कीसवीं सदी की कृषि में मल-जल तथा अवमल की प्रासंगिकता

शिवगोपाल मिश्र, दिनेश मणि तथा सुनील दत्त तिवारी
शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय,इलाहाबाद-211 002

[प्राप्त - जुलाई 9, 1998]

सारांश

निरन्तर बढ़ती जनसंख्या तथा तीव्र गति से हो रहे औद्योगिकीकरण के फलस्वरूप मल-जल तथा अवमल की मात्रा में भी समान रूप से वृद्धि हो रही है। सिंचाई जल के रूप में मल-जल तथा कार्बनिक पदार्थ के स्रोत के रूप में अवमल के प्रयोग पर ध्यान दिया जा रहा है। परन्तु अनुपचारित अवस्था में मल-जल तथा अवमल का प्रयोग हानिकारक है। मल-जल तथा अवमल में रोगजनक जीवाणुओं के अतिरिक्त भारी धातुयें भी पायी जाती हैं जो पशुओं तथा मनुष्यों दोनों ही के लिये अत्यधिक विषैली होती हैं। अतः मल-जल व अवमल के उपचार के पश्चात् ही खेत में प्रयोग करना चाहिये अन्यथा ऐसी मृदाओं में उगी हुयी फसलों [विशेषकर सब्जियों] के द्वारा इन धातुओं का उद्ग्रहण अधिकतम स्तर से अधिक हो जाने पर इनका उपयोग पशुओं तथा मनुष्यों सभी के लिये घातक सिद्ध हो सकता है।

Abstract

Relevance of sewage-sludge in agriculture in 21st century: By S. G. Misra, Dinesh Mani and S. D. Tiwari, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad-2

Sewage-sludge is increasing day by day due to rapid increase in urbanisation and industrialisation. As sewage output has increased and supplies of farmyard manure have decreased, sewage-sludge is likely to become more widely used on agriculture land. But sewage-sludge contains many heavy metals (besides pathogens) which are toxic to

animals and human beings alike. Crops grown on sewage-sludge-irrigated/added land take up these heavy metals in concentrations more than the permissible limit and create clinical problems. Hence, it is advised that sewage-sludge be used after proper treatment.

प्रायः छोटे-बड़े सभी नगरों की निकटवर्ती भूमि पर शाकभाजियों की खेती हेतु सिंचाई के रूप में शहरों के नालों में बहने वाले गन्दे जल यानी वाहित मल-जल (sewage) का ही प्रयोग किया जाता है। इसके अतिरिक्त खाद के स्रोत के रूप में अवमल (sludge) का भी प्रयोग किया जाता है। प्रयोगों द्वारा अब यह सिद्ध हो चुका है कि इस वाहित मल-जल तथा अवमल में अनेक विषैली भारी धातुयें पायी जाती हैं जो फसलों तथा मृदा दोनों के लिये हानिकारक सिद्ध हो सकती हैं। इन भारी धातुओं में प्रमुख हैं-कैडमियम, क्रोमियम, निकेल, जिंक इत्यादि।

अनुपचारित मल-जल, उद्योगों से निकलने वाले अन्य अपशिष्ट, शहरों का व्यर्थ ठोस पदार्थ (कूड़ा-करकट) नदियों, झीलों तथा अन्य जलाशयों में फेंकने से अच्छी उत्पादक भूमि भी उर्वरता की दुष्प्रभावित हो रही है। एक अध्ययन के अनुसार देश के प्रथम श्रेणी के 142 नगरों में से 44 शहरों में गंदा पानी नदियों और नालों में, 42 में कृषि-भूमि पर तथा अन्य 32 नगरों में कृषि, शहरी भूमि व नदियों दोनों में छोड़ा जाता है। शेष 24 नगरों का गंदा पानी समुद्र में छोड़ा जाता है। फलस्वरूप जलस्रोत तो प्रभावित होते ही हैं, साथ ही ऐसे जल से सिंचित मृदा भी प्रदूषित होती है। अनुपचारित मलजल के लगातार प्रयोग से मृदा की भौतिक दशा बिगड़ जाती है। मल-जल में मिली ठोस सामग्री मृदा रन्ध्रों को बन्द कर देती है जिससे मृदा की जल और वायु की पारगम्यता कम हो जाती है। इसके अतिरिक्त मृदा में जीवाणुओं की संख्या कम हो जाती है तथा इसके बदले में प्रोटोजोआ वर्ग के सूक्ष्मजीवों की संख्या बढ़ जाती है।

यद्यपि वाहित मल-जल एवं अवमल कार्बनिक पदार्थ, नाइट्रोजन, फास्फोरस के अच्छे स्रोत हैं (पोटाश एवं अन्य गौण और सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की भी कुछ न कुछ मात्रा इसमें पायी जाती है।) किन्तु वाहित मल-जल के लगातार प्रयोग से मिट्टी में नाइट्रोजन के खनिजीकरण पर प्रतिकूल प्रभाव पड़ता है। साथ ही, मिट्टी के अन्य भौतिक, रासायनिक एवं जैविक गुण भी प्रभावित होते हैं-यथा मृदा कणाकार संरचना, मृदा पी० एच०, धनायन विनिमय क्षमता, प्रतिरोधक क्षमता, सूक्ष्मजीवों की क्रियाशीलता आदि।

मिचेल[1] ने यूरोप में वाहित मल-जल से की जाने वाली खेती का सर्वेक्षण करने के बाद यह पाया कि वाहित मल जल से सिंचाई करने पर सब्जियों तथा घासों की उपज में आशातीत वृद्धि होती है किन्तु साथ ही कुछ विषैले भारी तत्व भी मृदा में मिलते रहते हैं जिनका प्रभाव मिट्टी तथा पौधों पर पड़ता है। इन तत्वों में मुख्यतः कैडमियम, लेड, क्रोमियम, निकेल, मरकरी आदि रहते हैं।

एब्डन तथा नेनाह[2] के अनुसार बलुई मिट्टियों की सिंचाई वाहित मल-जल से करने पर मिट्टी की संरचना सुधर जाती है किन्तु लगातार सिंचाई करते रहने से अन्य मिट्टी 'बीमार' पड़ सकती है।

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि अनुपचारित मल-जल से सिंचित भूमियों से प्राप्त फसलें मनुष्यों तथा पशुओं में रोग उत्पन्न कर सकती हैं। इसीलिये वाहित मल-जल के प्रयोग करने की आधुनिक प्रणाली में ठोस भाग तथा अवमल को अलग कर लिया जाता है और द्रव-भाग को जो कि मल-जल है, सिंचाई के काम में लाते हैं। यद्यपि कुछ किसान कच्चे अवमल को ही खेतों में डालना पसन्द करेंगे किन्तु इसे खाद के रूप में प्रयोग करने से पहले उसका प्रारम्भिक उपचार किया जाना चाहिए। इसके लिये अनेक विधियां-जैसे सेप्टिक टैंक विधि, छनाव तथा अन्तः स्राव विधि और उत्प्रेरित अवमल विधि प्रयोग में लायी जाती हैं। इन सब विधियों का सिद्धान्त एक ही है-- कार्बनिक पदार्थ का जैविक आक्सीकरण का सिद्धान्त। इस प्रकार आक्सीकृत पदार्थ (जिसे उत्प्रेरित अवमल Activated Sludge भी कहते हैं) में शुष्क भार के आधार पर लगभग 3-5% नाइट्रोजन, 2% फास्फोरस तथा 1% पोटाश होता है।

मिश्रा तथा मणि[3] के द्वारा शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान इलाहाबाद के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर किये गये प्रयोगों द्वारा यह निष्कर्ष निकला है कि यहाँ उपलब्ध मल-जल तथा अवमल की भारी धातुओं की सान्द्रता अधिकतम अनुमेय स्तर से अधिक नहीं है (देखिये सारणी 1 व 2) किन्तु भविष्य में लगातार सिंचाई करते रहने से मृदा तथा फसलों में भारी धातुओं का संचय हो सकता है।

मिश्रा तथा मणि[4] द्वारा कैडमियम और कैल्शियम की अन्योन्य क्रिया के अध्ययन के दौरान यह पाया गया कि अकेले कैडमियम की उपस्थिति में पालक तथा मेंथी की उपज कम प्राप्त हुई जबकि कैडमियम तथा कैल्शियम दोनों को साथ-साथ प्रयोग करने पर दोनों फसलों की उपज अधिक हुई।

प्रयोगात्मक

वाहित मल-जल एवं अवमल के प्रतिनिधि नमूने शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रयोगात्मक फार्म के निकट से बह रहे नगर महापालिका के नाले से लिए गये। इस नाले में मुख्यतः घरेलू अपशिष्ट ही रहता है।

सारणी 1

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर उपलब्ध मल-जल में भारी धातुओं की सान्द्रता

भारी धातुएँ	सान्द्रता (पी. पी. एम. में)
कैडमियम (Cd)	0.55
क्रोमियम (Cr)	0.58
लेड (Pb)	3.52
जिंक (Zn)	8.32

सारणी 1 व 2 में क्रमशः वाहित मल-जल एवं अवमल में विद्यमान भारी धातुओं की सान्द्रता दी गई है। भारी धातुओं के विश्लेषण के लिये एटॉमिक एब्जार्प्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर (PYE UNICA MSP 2900 Coupled with SP-9 Computer) की सहायता ली गई। वाहित मल-जल एवं अवमल में भारी धातुओं की कुल मात्रा ज्ञात करने के लिये पौधों के शुष्क किये गये नमूनों को डाइ-एसिड मिश्रण द्वारा निष्कर्षित किया गया।

मृदा में भारी धातुओं की अभिवृद्धि एवं पौधों द्वारा इनके उद्ग्रहण को कम करने के उपाय की दिशा में कार्बनिक पदार्थ (गोबर की खाद) तथा फास्फेटीय पदार्थ (मसूरी रॉक फास्फेट) के साथ प्रयोग किये गये।

सारणी 2

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर उपलब्ध अवमल में भारी धातुओं की सान्द्रता

भारी धातुएँ	कुल	सान्द्रता (पी.पी.एम.में) डी.टी.पी.ए.-निष्कर्षित
कैडमियम (Cd)	23.50	1.57
क्रोमियम (Cr)	15.75	8.83
लेड (Pb)	31.75	0.66
जिंक (Zn)	196.00	18.80

इस प्रयोग के लिये 48 वर्गमीटर के क्षेत्रफल में यादृच्छिक विधि से 1×1 मीटर के प्लाट बनाकर उपचार किये गये। इन प्लॉटों में गोबर की खाद (FYM की चार विभिन्न मात्रायें (0, 15, 20, 25, टन/हैक्टेयर) तथा मसूरी रॉक फास्फेट (MRP) की भी चार विभिन्न मात्रायें (0, 125, 150, 175 कि० ग्रा०/हैक्टेयर)डाली गईं। मसूरी रॉक फास्फेट में कुल P_2O_5 की मात्रा 19.4% थी तथा गोबर की खाद में कुल कार्बन, नाइट्रोजन, फास्फोरस एवं पोटाश की मात्रायें क्रमशः 1.5, 0.5, 0.25 तथा 0.5% थीं। प्लाटों में पालक को सूचक फसल के रूप में उगाया गया। पालक की बुवाई 20कि० ग्रा० प्रति हैक्टेयर की दर से की गई। प्लाटों की सिंचाई वाहित मल-जल से समय-समय पर की गई। इस तरह कुल 8 सिचाइयाँ की गईं। 60 दिन बाद फसल की कटाई की गई। पौधों की पत्तियों को सुखाकर उन्हें बारीक पीस कर ट्राइ-एसिड मिश्रण द्वारा निष्कर्षित करके निष्कर्ष में एटॉमिक एब्जार्प्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर की सहायता से भारी धातुओं की कुल मात्रा ज्ञात की गई।

परिणाम सारणी -3 मे अंकित हैं।

सारणी 3

पालक की पत्तियों में भारी धातुओं की सान्द्रता

उपचार	भारी धातुओं की सान्द्रता (पी.पी.एम. में)			
	Cd	Cr	Pb	Zn
1. गोबर+ मसूरी राकफास्फेट = 0 (कन्ट्रोल)	3.50	12.0	10.0	10.2
2. गोबर (0) + मसूरी राकफास्फेट (125 कि ग्रा./है.)	3.20	10.9	9.6	12.2
3. गोबर (0) + मसूरी राकफास्फेट (150 कि ग्रा./है.)	4.40	11.2	9.8	12.0
4. गोबर (0) + मसूरी राकफास्फेट (175 कि ग्रा./है.)	4.80	11.5	9.2	11.5
5. गोबर (15 टन/है०)+ मसूरी राकफास्फेट (0)	3.15	11.4	9.4	13.9
6. गोबर (15 टन/है.)+ मसूरी राकफास्फेट (125 कि. ग्रा./है.)	3.20	10.5	8.5	14.2
7. गोबर (15 टन/है.)+ मसूरी राकफास्फेट (150 कि.ग्रा./है.)	3.30	10.8	8.8	16.2
8. गोबर (15 टन/है.)+ मसूरी राकफास्फेट (175 कि.ग्रा./है.)	3.10	10.9	8.2	16.6
9. गोबर (20 टन/है.)+ मसूरी राकफास्फेट (0)	3.90	10.6	9.5	17.0
10. गोबर (20 टन/है.)+ मसूरी राकफास्फेट (125 कि.ग्रा./है.)	3.60	11.0	9.2	14.6
11. गोबर (20 टन/है.)+ मसूरी राकफास्फेट (150 कि.ग्रा./है.)	4.20	10.8	8.6	15.6
12. गोबर (20 टन/है.)+ मसूरी राकफास्फेट (175 कि. ग्रा./है.)	3.80	10.6	8.8	17.0
13. गोबर (25 टन/है.) + मसूरी राकफास्फेट (0)	2.90	9.9	8.2	18.0
14. गोबर (25 टन/है.)+ मसूरी राकफास्फेट (125 कि.ग्रा./है.)	3.10	10.8	9.5	16.4
15. गोबर (25 टन/है.)+ मसूरी राकफास्फेट (150 कि.ग्रा./है.)	2.80	9.5	8.0	16.20

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 3 के विवेचन से स्पष्ट है कि कार्बनिक पदार्थ तथा फास्फेट की मात्रा बढ़ाने से पालक द्वारा Cd, Cr तथा Pb का अवशोषण कम होता है। अकेले मसूरी रॉक फास्फेट या अकेले कार्बनिक पदार्थ की कम या औसत मात्रा प्रयोग करने पर भारी धातुओं के अवशोषण में कोई विशेष कमी नहीं

आई। यदि कार्बनिक पदार्थ अधिक मात्रा में (25 टन/हैक्टेयर) प्रयोग किया जाता है तो कैडमियम (Cd) का अवशोषण 18-20 प्रतिशत कम हो जाता है किन्तु साथ ही मसूरी रॉक फास्फेट की अधिक मात्रा प्रयुक्त होनी चाहिये। कैडमियम (Cd) की ही तरह लेड (Pb) के अवशोषण में 20 प्रतिशत की तथा क्रोमियम (Cr) के अवशोषण में 16 प्रतिशत तक की कमी आई। केवल जिंक (Zn) ही ऐसी भारी धातु है जिसके अवशोषण में कोई कमी नहीं आई बल्कि अधिकता ही परिलक्षित हुई। वाहित मल-जल में पहले से ही जिंक की मात्रा अधिक होने के कारण ऐसा हो सकता है।

निर्देश

1. मिचेल, जी. ए. Engg. New Record. 1931, 106 : 66-69.

2. एब्डन, एफ. .एम. तथा नेनाह, एम. Plant and Soil, 1980, 56 : 53-57.

3. मिश्रा, एस. जी. तथा दिनेश मणि, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1990, 33, 3 : 193-199

4. मिश्रा, एस. जी. तथा दिनेश मणि, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1997, 40, 4 : 221-228.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 4, October, 1998.

फूरियर श्रेणी तथा उसकी संयुग्मी श्रेणी की (C, 1) (E, 1) संकलनीयता

श्यामलाल

गणित विभाग, हरिश्चन्द्र डिग्री कालेज, वाराणसी

तथा

सुनीता वर्मा

गणित विभाग केन्द्रीय हिन्दू गर्ल्स स्कूल, कमच्छा, वाराणसी

[प्राप्त – सितम्बर 13, 1998]

सारांश

इस प्रपत्र में फूरियर श्रेणी तथा इसकी संयुग्मी श्रेणी की (C, 1) (E, 1) संकलनीयता पर दो प्रेमयों की स्थापना की गई है।

Abstract

The (C, 1) (E, 1) summability of a Fourier series and its conjugate series. *By* Shyam Lal, Department of Mathematics, Harish Chandra Post Graduate College, Varanasi, and Sunita Verma, Department of Mathematics, Central Hindu Girls School, Kamachha, Varanasi.

In this paper, two theorems on (C, 1) (E, 1) summability of Fourier series and its conjugate series have been established.

1. परिभाषाएँ तथा संकेतन

परिभाषा 1. यदि

$$E_n^1 = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k \to S, \text{ ज्योंज्यों } n \to \infty \qquad (1.1)$$

तब अनन्त श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ आंशिक योगफलों सहित निश्चित संख्या के प्रति समाकलनीय (E, 1) कहा जाता है।

परिभाषा 2. (E, 1) के (C, 1) रूपान्तर E_n^1 से श्रेणी $\sum_{0}^{\infty} u_n$ के आंशिक योग S_n के (C, 1) (E,1) रूपान्तर को परिभाषित करता है।

इस तरह यदि

$$(CE)_n^1 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} E_k^1 \to S, \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{1.2}$$

जहाँ E_n^1 दर्शाता है S_n के $(E, 1)$ रूपान्तर को। तब $\sum_{0}^{\infty} u_n$ $(C, 1)$ $(E, 1)$ माध्य या S तक मात्र समाकलनीय $(C, 1)$ $(E, 1)$ कहलाता है। माना कि $f(x)$ x का 2π आवर्ती फलन है और $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय है जिस रूप में लेबेस्क में है तो कल्पना कीजिये कि -

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) = \sum_{0}^{\infty} A_n \ (x) \tag{1.3}$$

$f(x)$ से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी है। फूरियर श्रेणी (1. 3) की संयुग्मी श्रेणी जो सामान्यतया f (x) की संयुग्मी श्रेणी कहलाती है वह है -

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cos nx - a_n \sin nx \right) = \sum_{1}^{\infty} B_n \ (x) \tag{1.4}$$

हम प्रायः निम्नलिखित संकेतनों को प्रयोग में लावेंगे

$$\phi(t) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)$$

$$\psi_0(t) = f(x + t) - f(x - t)$$

$$\tau = \left[\frac{1}{t} \right] = \frac{1}{t} \text{ का समाकल अंश}$$

2. ज्ञात प्रमेय

(λ) (C, 1) रूप वाली योगफल संकलनीयताओं का अध्ययन कई लेखकों ने किया है जहां λ नियमित संकलनीयता तथा इसकी श्रेणी के लिए आया है। दीक्षित[1] ने अनुक्रम [(n, B_n(x)] की (C, 1) (N,pn) संकलनीयता पर विचार किया है और निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है।

प्रमेय A : यदि

$$\psi(t) = f(x + t) - f(x - t) - 1 = 0(1) \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0 \quad (2.1)$$

तथा $\{p_n\}$ इस तरह अनृण, एकदिष्ट अवर्धमान श्रेणी है कि $S_n = 0(1)$, तब अनुक्रम $\{(n B_n(X)\}$ $(C, 1)(N, p_n)$ के प्रति $\frac{1}{\pi}$ तक समाकलनीय है। (2.2)

3. मुख्य प्रमेय

दीक्षित[1] के प्रमेय A की तरह ऐसी ही अन्य योगफल विधियों की आशा की जाती है जिनमें द्वितीय गुणक (N, p_n) से पृथक है। इसको ध्यान में रखकर ही हमने फूरियर श्रेणी (1.3) की $(C, 1)$ $(E, 1)$ संकलनीयता तथा संयुग्मी फूरियर श्रेणी (1.4) के लिए प्रमेय A का सार्वीकरण किया है।

प्रमेय 1.

माना कि $\{p_n\}$ असली अचरों का ऐसा अनृण, एकदिष्ट, अवर्धमान अनुक्रम है कि

$$P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \to \infty, \text{ज्यों-ज्यों} n \to \infty$$

यदि

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)|\, du = 0\left[\frac{1}{P_\tau}\right] \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0 \quad (3.1)$$

तथा

$$\log n = O(P_n), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty \quad (3.2)$$

तब फूरियर श्रेणी $\sum_0^\infty A_n(x)\, f(x)$ के प्रति संकलनीय $(C, 1)(E, 1)$ है।

प्रमेय 2.

प्रमेय (1) में से प्रतिबन्धों की तरह $\{p_n\}$के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत, यदि

$$\Psi_0(t) = \int_0^t |\psi_0(u)|\, du = 0\left(\frac{t}{P_\tau}\right) \text{ज्यों ज्यों } t \to 0 \quad (3.3)$$

तब फूरियर श्रेणी $\sum_1^\infty B_n(x)$ निम्नांकित समाकल के मान के प्रति संकलनीय (C, 1) (E, 1) है -

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{1/n}^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{\tan\frac{t}{2}}\, dt,$$

बशर्ते कि यह समाकल कौशी के अनुसार विद्यमान हो।

4. आकलन

हमें क्रमशः निम्नलिखित आकलनों की आवश्यकता पड़ेगी

$$\left(1 - \cos^n \frac{t}{2} \cos\frac{nt}{2}\right) = O\left(n^2 t^2\right)\ 0 < t < \pi \text{ के लिए} \tag{4.1}$$

$$\left[1 - \frac{2}{nt} \cos^n \frac{t}{2} \sin \frac{nt}{2}\right] = O(nt),\ 0 < t < \frac{1}{n} \text{ के लिए} \tag{4.2}$$

(4.1) की उपपत्ति

$$1 - \cos^n \frac{t}{2} \cos\left(\frac{nt}{2}\right) = 1 - \left\{1 - \left(\frac{t^2}{8} - \ldots\right)\right\}^n \left\{1 - \frac{n^2 t^2}{8} + \ldots\right)$$

$$= 1 - \left\{1 - \frac{nt^2}{8} + \ldots\right\}\left\{1 - \frac{n^2 t^2}{8} + \ldots\right\}$$

$$= 1 - \left\{1 - \frac{n^2t^2}{8} - \frac{nt^2}{8} + \frac{n^3t^4}{64} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{n^2t^2}{8} + \frac{nt^2}{8} - \frac{n^3t^4}{64}$$

$$= \frac{n^2t^2}{8} + \frac{nt^2}{8}$$

$$= \frac{n^2t^2}{8}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= O\left(n^2t^2\right)$$

हम (4.2) की पुष्टि $0 < t < \frac{1}{n}$, के लिए करेंगे। हमें पता है कि

$$\left[1 - \frac{2}{nt}\cos^n\frac{t}{2}\sin\frac{nt}{2}\right] = 1 - \frac{2}{nt}\left\{1 - \left(\frac{t^2}{8} - \dots\right)\right\}^n \left\{\frac{nt}{2} - \frac{n^3t^3}{48} + \dots\right\}$$

$$\leq 1 - \left(1 - \frac{nt^2}{8}\right\}\left\{1 - \frac{n^2t^2}{24}\right\}$$

$$\leq 1 - \left(1 - \frac{nt^2}{8} - \frac{n^2t^2}{24}\right\}$$

$$= \frac{nt}{8}\left(1 + \frac{nt^2}{8}\right)$$

$$= \frac{nt^2}{8}\left(1 + \frac{nt}{8}\right)$$

$$= O(nt^2)$$

5. प्रमेय 1 की उपपत्ति

टिचमार्श[3] का अनुसरण करके तथा रीमान-लेबेस्क प्रमेय का प्रयोग करने पर फूरियर श्रेणी $\sum_0^\infty A_n(x)$ के आंशिक योग S_n को निम्नवत् लिखा जा सकता है -

$$S_n - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\phi(t)}{t}\sin nt\, dt + 0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty$$

अतः परिभाषा 1 का प्रयोग करके पर S_n के $(E, 1)$ रूपान्तर को निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता हैं।

$$E_n^1 - f(x) = \frac{2^{-n}}{\pi}\int_0^n \frac{\phi(t)}{t}\left\{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\sin kt\right\} dt + 0(1)$$

$$= \frac{2^{-n}}{\pi}\int_0^n \frac{\phi(t)}{t}\left\{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikt}\right\} dt + 0(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\phi(t)}{t}\cos^n\frac{t}{2}\sin\frac{nt}{2}\, dt + 0(1)$$

E_n^1 के (C, 1) रूपान्तर अर्थात् S_n के $(C, 1)$ $(E, 1)$ रूपान्तर को $(C\ E)_n^1$ द्वारा दर्शाने पर हमें $(C, 1)$ संकलन की नियमितता से

$$(CE)_n^1 - f(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\left[\sum_{k=1}^{n} \cos^k \frac{t}{2} \sin\frac{nt}{2}\right] dt + 0(1)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\, I_p\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^k \frac{t}{2}\right) e^{ik\,t/2}\right] dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\, I_p\left[\frac{e^{it/2}\cos t/2\,\{1 - (e^{it/2}\cos t/2)\}}{1 - e^{it/2}\cos\frac{t}{2}}\right] dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\left[\frac{1 - \cos^n t/2\ \cos^n t/2}{\tan t/2}\right] dt$$

प्राप्त होता है जिसे निम्नवत् भी लिखा जा सकता है -

$$(CE)_n^1 - f(x) = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t^2}\left(1 - \cos^n \frac{t}{2}\cos\frac{nt}{2}\right) dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{1/n^a} + \int_{1/n^a}^{\pi}\right] \frac{\phi(t)}{t^2}\left(1 - \cos^n \frac{t}{2}\cos\frac{nt}{2}\right) dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[I_1 + I_2 + I_3\right] + 0(1),\ \text{माना} \tag{5.1}$$

जहाँ $0 < \alpha < t/2$

आइये $I_{1\,J}$ पर विचार करें

$$|I_1| \leq \frac{1}{n}\int_0^{1/n} \frac{\phi(t)}{t^2}\left[1 - \cos^n \frac{t}{2}\cos\frac{nt}{2}\right] dt$$

$$< \frac{1}{n} \int_0^{1/n} \frac{|\phi(t)|}{t^2} \, O\left(n^2 t^2\right) dt, \text{ (4.1) से}$$

$$= O(n) \int_0^{1/n} |\phi(t)| \, dt$$

$$= O(n) \; o\left\{\frac{1/n}{P_n}\right\} \text{ (3.1) से}$$

$$= o\left\{\frac{1}{P_n}\right\}$$

$$= o\left\{\frac{1}{\log n}\right\} \text{ (3.2) से}$$

$$= 0(1), \quad \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty \qquad (5.2)$$

अब

$$|I_2| \leq \frac{1}{n} \int_{1/n}^{1/n^n} \frac{|\phi(t)|}{t^2} \, O(1) \, dt$$

$$\leq \frac{1}{n}\left[\left\{\frac{1}{t^2} \Phi(t)\right\}_{1/n}^{1/n^\alpha} + \int_{1/n}^{1/n^\alpha} \frac{2}{t^3} \Phi(t)\right] dt$$

$$= o\left[\frac{1}{n}\right]\left[\left\{\frac{1}{tP_\tau}\right\}_{1/n}^{1/n^\alpha} + 2\left[o\int_{1/n}^{1/n^\alpha}\left(\frac{1}{t^2 P_\tau}\right) dt\right]\right]$$

$$= o\left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{n^\alpha}{P_{n^\alpha}} - \frac{n}{P_n}\right] + o\left[\frac{2}{nP_{n^\alpha}} \int_{1/n}^{1/n^\alpha} \frac{dt}{t^2}\right]$$

$$= o\left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{n^\alpha}{P_{n^\alpha}} - \frac{n}{P_n}\right] + o\left\{\frac{2}{nP_{n^\alpha}}\left(n - n^\alpha\right)\right]$$

$$= o\left(\frac{1/n^{1-\alpha} - 1}{\log n}\right) + o\left[\frac{2}{\alpha \log n}\left(1 - \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)\right], \text{(3.2)से}$$

$$= o(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty, \text{ क्योंकि } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \tag{5.3}$$

अन्त में हमें

$$|I_3| \leq \frac{1}{n} \int_{1/n^{\alpha}}^{\pi} \frac{|\phi(t)|}{t^2} dt$$

$$< \frac{n^{2\alpha}}{n} \int_{1/n^{\alpha}}^{\pi} |\phi(t)| \, dt$$

$$= o\left[\frac{1}{n^{1-2\alpha}}\right] O(1), \text{क्योंकि } \phi(t) \text{ समाकलनीय है } \frac{1}{n} \leq t \leq \pi \text{ के लिए।}$$

$$= o(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty, \text{क्योंकि } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \tag{5.4}$$

प्राप्त होता है। अन्त में (5.1), (5.2), (5.3) तथा (5.4) से परिणामों का एकत्रित करने पर हमें निम्न की प्राप्ति होती है

$$(CE)_n^1 - f(x) = 0(1) \text{ज्यों-ज्यों } n \to \infty$$

इस तरह प्रमेय 1 की उपत्ति पूरी होती है।

6. प्रमेय 2 की उपपत्ति

श्यामलाल[2] का अनुसरण करने तथा रीमान लेबेस्क प्रमेय का प्रयोग करने पर संयुग्मी श्रेणी $\sum_1^{\infty} B_n(x)$ के आंशिक योग को निम्न रूप में लिखा जा सकता है -

$$S_n - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\psi_0(t)}{\tan t/2} dt = 0(1) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t} \cos nt \, dt$$

S_n का $(E, 1)$ रूपान्तर E_n को निम्नवत् प्राप्त किया जा सकता है --

$$E_n - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{\tan t/2} dt + 0(1)$$

$$= \frac{-2^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kt \right\} dt$$

$$= -\frac{2^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t} R_p \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikt} \right\} dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t} \cos^n \frac{t}{2} \cos \frac{nt}{2}\, dt \qquad (6.1)$$

अब E_n के $(C, 1)$ रूपान्तर अर्थात् S_n के $(C, 1)$ $(E, 1)$ रूपान्तर को $(C\,E)_n$ के द्वारा दर्शित करने पर हमें $(C, 1)$ संकलन की नियमितता से

$$(CE)_n - \frac{1}{2\pi} \int_0^{1} \frac{\psi_0(t)}{\tan\, t/2} dt + 0(1)$$

$$= \frac{-1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \cos^k \frac{t}{2} \cos \frac{k\,t}{2} \right\} dt$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t} R_p \left\{ \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} \cos^{kt/2} \right\} dt$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t} R_p \left[\frac{e^{it/2} \cos t/2 \,\{1 - (e^{int/2} \cos^n t/2)\}}{1 - e^{it/2} \cos \frac{t}{2}} \right] dt$$

$$= -\frac{i}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t} \left[\frac{\cos^n t/2 \,\sin nt/2}{\tan t/2} \right] dt$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t} \cos^n \frac{t}{2} \sin \frac{nt}{2}\, dt + 0(1) \qquad (6.2)$$

प्राप्त होता है। अपरंच, (5.2) से हम लिख सकते हैं–

$$(CE)_n - \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{\tan\ t/2}\,dt + 0(1)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{1/n} \frac{\psi_0(t)}{\tan\ t/2}\,dt - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t^{2\cdot}} \cos^n \frac{t}{2} \sin\frac{nt}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{1/n} \frac{\psi_0(t)}{\tan t/2}\,dt - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t^2} \cos^n\left(-\frac{t}{2}\right) \sin\frac{nt}{2}\,dt + 0(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{1/n} \frac{\psi_0(t)}{t}\left[1 - \frac{2}{nt}\cos^n \frac{t}{2} \sin\frac{nt}{2}\right] dt$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_{1/n}^{\pi} \frac{\psi_0(t)}{t^2} \cos^n \frac{t}{2} \sin\frac{nt}{2}\,dt + 0(1)$$

$$= \frac{1}{\pi} P_1 - \frac{2}{\pi} P_2 + 0(1) \quad \text{माना} \tag{6.3}$$

आकलन (4.2) तथा अभिधारणा (3.3) से

$$|P_1| \le \int_0^{1/n} \frac{|\psi_0(t)|}{t}\, O(nt^2)\, dt$$

$$= O(n)\int_0^{1/n} t\,|\psi_0(t)|\,dt$$

$$= O\left(\int_0^{1/n} |\psi_0(t)|\,dt\right), \text{(2.5)से}$$

$$= O(1)\ o\left\{\frac{1}{nP_n}\right\}$$

$$= O\left[\frac{1}{n\ \log n}\right] \text{(2.6)से}$$

$$= 0(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty \tag{6.4}$$

P_2 पर विचार करते हुए हम लिखेंगे

$$P_2 = \frac{1}{n}\left[\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}} + \int_{1/n^{\alpha}}^{\pi}\right] \frac{\psi_0(t)}{t^2} \cos^n \frac{t}{2} \sin\frac{nt}{2}\, dt$$

$$= P_{2.1} + P_{2.2}\text{, माना, जहाँ } 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

आंशिक समाकलन तथा (3.3) से

$$|P_{2.1}| \le \frac{1}{n}\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}} \frac{|\psi_0(t)|}{t}\, O(1)\, dt$$

$$= O\left[\frac{1}{n}\right]\left[\left\{O\left(\frac{1}{t P_r}\right)\right\}_{1/n}^{1/n^{\alpha}} + 2\int_{1/n}^{1/n^{\alpha}} O\left(\frac{1}{t^2 P_{\tau}}\right)dt\right]$$

$$= 0(1)\text{, ज्यों-ज्यों } n \to \infty,$$

जैसा कि प्रमेय 1 के I_2 आकलन में है। प्रमेय 1 के I_3 के आकलन में जैसा किया गया उसी तरह आगे बढ़ते हुए

$$|P_{2.2}| \le \frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi} \frac{|\psi_0(t)|}{t^2}\, dt$$

$$= 0(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty$$

इस तरह हमने यह दिखलाया कि

$$P_2 = 0(1)\text{, ज्यों-ज्यों } n \to \infty \tag{6.5}$$

अन्त में (6.3.) (6.4) तथा (6.5) परिणामों के एकत्रीकरण से

$$(CE)_n^1 - \frac{1}{2\pi}\int_{1/n}^{\pi} \frac{|\psi_0(t)|}{\tan t/2}\, dt = 0(1)\text{ज्यों ज्यों} n \to \infty,$$

की प्राप्ति होती है। इस तरह प्रमेय 2 की उपपत्ति पूरी हुई।

निर्देश

1. दीक्षित, एच. पी. : P. A. M. S. 1969, 21(11), 10-20.

2. श्यामलाल : Bull. Cal. Math. Soc. 1997, 89, 97-104.

3. टिचमार्श, ई. सी. : Theory of functions 1939, 13, 34 पृष्ठ 145.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 41, No. 4, October, 1998.

जलवायु विज्ञान में अरैखिक क्वांटम BIS प्रभावः चक्रवात, तूफान तथा टारनेडो-सांख्यिकीय यांत्रिकी दृष्टि

एम० एम० बजाज, वी० आर० सिंह, ए० कुमार, पी० एन० पाण्डेय

भौतिकी तथा ताराभौतिकी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय

तथा

जे० बी० अग्रवाल एवं पी० कुमार

भौतिकी विभाग, डी० जे० कालेज, बडौत (उ० प्र०)

[प्राप्त-जून 28, 1998]

सारांश

वृहत विहित, विन्यासी, घूर्णी, कम्पनी तथा अर्ध-चिरसम्मत घूर्णात्मक BIS प्रक्रमों के हेतु विभाजन फलनों पर विचार करते हुए हमने यह दिखाया है कि अरैखिक क्वांटम BIS प्रभाव की भूमिका चक्रवातों, तूफानों एवं टारनेडों को उत्पन्न करने में अत्यधिक महत्वपूर्ण है। चिरस्थायी LSFAO के कारण उत्पन्न मार्केवियन श्रृखलाएँ ही दुर्भाग्यपूर्ण जलवायवीय घटनाओं के घटित होने के लिए मुख्यतःउत्तरदायी हैं। हमने रेडान व्युत्क्रम तथा $\frac{1}{f}$ प्रक्रमों की अस्थानीयता की परीक्षा समुद्र में गहन BIS क्रियाविधियों के कारण होने वाले जलवायु परिवर्तन के परिप्रेक्ष्य में की है।

Abstract

Non-linear quantum BIS effect in Climatology : Cyclones, Storms and Tornadoes—Statistical Mechanics approach. *By* M. M. Bajaj, V. R. Singh, A. Kumar, P. N. Pandey, Medical Physics Research Laboratory, Department of Physics and Astrophysics, University of Delhi, Delhi 110 007, and J. B. Agrawal and P. Kumar, Department of Physics, D. J. College, Baraut, U. P.

Considering the partition functions for (a) grand canonical (b) configurational (c) rotational (d) vibrational and (e) semi-classical rotational BIS processes, we show that the non-linear quantum BIS effect plays a very important role in creating cyclones, storms and tornadoes. The Markovian chains, which are established because of the persistent LSFAO, are the major factors responsible for the creation of tragic climatic episodes. We have examined the non-locality of the Radon inversion and $\frac{1}{f}$ processes with special reference to change in climate due to intense BIS mechanisms in the ocean.

1. प्रस्तावना

1.1 चक्रवात, टारनेडो तथा तूफान : चक्रवातों, टारनेडों तथा तूफानों के लिए जो पारम्परिक व्याख्याएँ की जाती हैं। वे भौतिकी तथा गणित की दृष्ट से दोषपूर्ण हैं। उनमें विशाल सागरों में मनुष्यों द्वारा उत्पन्न क्षोभ को ध्यान में नहीं रखा जाता। प्रस्तुत प्रपत्र में अत्यधिक गतियों वाले उन चक्रवातों, टारनेडों तथा तूफानों के विषय में नवीन दृष्टिकोण प्रस्तुत किया गया है जो सुस्थापित मनुष्यों तथा पशुओं की आबादी के लिए असह्य उत्पात तथा यातनाएँ उत्पन्न करने वाले हैं।

1.2. अध्ययन का उद्देश्य : इस प्रपत्र का मुख्य उद्देश्य जलवायु विज्ञान पर अरैखिक क्वांटम BIS प्रभाव की भूमिका ज्ञात करना है।

2. सैद्धान्तिक विचारणा

BIS प्रभाव की सांख्यिकीय यांत्रिकी से हमें निम्नलिखित विभाजन फलन मिलते हैं :

(1) गहन BIS प्रक्रमों के लिए बृहत विभाजन फलन इस प्रकार है

$$= e^{\{\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_1 \zeta^1\}}$$

जहाँ ζ = BIS प्रक्रम की पलायनता (fugacity) है

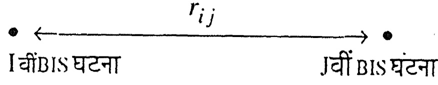
(2) चिरसम्मत सन्निकटन में BIS प्रक्रमों के लिए विन्यासी विभाजन फलन इस प्रकार है

$$Q_N = \frac{1}{N!} \int \dots \dots \int e^{-U(r_1, r_2, \dots \dots)/kT} dr_1, \dots \dots dr_N$$

जहाँ $U = \sum_{(i,j)\text{pairs}} u(r_{i,j})$ BIS क्रियाविधियों की अन्योन्य क्रियाओं का सूचक विभव फलन

= युग्म अन्योन्यक्रिया विभवों $u_{r_{ij}}$ का योग

N = एक समान BIS घटनाओं की संख्या जो बधस्थल में घटित होती हैं



(3) प्रतिदिन N एक समान BIS घटनाओं वाले प्ररूपी यंत्रीकृत बधस्थल के लिए समग्र विभाजन फलन

$$= Z_N(T; V) = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3N/2} j(T)^N Q_N .$$

Q_N = विन्यासी विभाजन फलन

m = बध किये जाने वाले पशु का औसत भार

V = बधस्थल का कुल आयतन

kT = पशु से सम्बद्ध ऊर्जा

(4) घूर्णी प्रकृति वाले BIS प्रभाव के लिए घूर्णी विभाजन फलन ($r(T)$ है

$$r(T) = \left(\frac{8\pi^2 AkT}{h^2}\right)^{1/2} \left(\frac{8\pi^2 BkT}{h^2}\right)^{1/2} \left(\frac{8\pi^2 CkT}{h^2}\right)^{1/2}$$

जहाँ A, B, C घूर्णी विभाजन प्रभाव के लिए जडत्व के मुख्य घूर्णन है।

(5) कम्पनमान BIS क्रियाविधियों के लिए कम्पनिक विभाजन फलन इस प्रकार है -

$$v(T) = \prod_{i=1}^{3n-6} e^{-\frac{1}{2}\frac{h\nu_i}{kT}} / 1 - e^{-h\nu_i} = \prod_{i=1}^{3n-6} e^{\frac{-Q_i}{T}} / 1 - e^{\frac{-Q_i}{T}}$$

$$\theta_i = \frac{h\nu_i}{k}$$

जहाँ पर υ_ι = सामान्य आवृत्तियाँ

तथा $i = 1, 2, \ldots, \ldots, 3n-6$

और n = प्ररूपी बधस्थल में BIS घटनाओं की संख्या

(6) BIS क्रियाविधि के लिए आन्तरिक विभाजन फलन है -

$$j(T) = \sum_{l} g_l e^{\frac{-\varepsilon_l}{kT}}$$

जहाँ ε_l = केवल एक BIS घटना से क्षय हुई ऊर्जा, जिसमें से स्थानांतरित अंश को निकाल दिया गया है

l = अणु की ऐसी अन्तरिक क्वांटम अवस्था की क्वांटम संख्या

g_1 = अपभ्रंशन (degeneration)

कम्पनिक विभाजन फलन जिसकी आवृत्ति

$$= \frac{e^{-\theta\upsilon/2T}}{i - e^{-\theta\upsilon/T}} = \left[2 \sinh \frac{\theta_v}{2T}\right]^{-1}$$

जहाँ $\theta_v = \frac{h\upsilon}{k}$,

(7) I जडत्व आघूर्ण वाला घूर्णनात्मक विभाजन फलन

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\exp\left\{- l(l + 1)\frac{h^2}{8\pi^2 IkT}\right\}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\, e^{- l(l + 1)\frac{\theta_r}{T}}$$

जहाँ $\theta_r = \frac{h^2}{8\pi^2 Ik}$

(8) BIS प्रक्रम के लिए अर्ध-चिरसम्मत घूर्णनात्मक विभाजन फलन

$$= \frac{8\pi^2 Ik\, T}{h^2} = \frac{T}{\theta_n}$$

3. BIS प्रक्रमों को उत्पन्न करने वाले चक्रवात की अनृण बेसिक हाइपरज्यामितीय श्रेणी

BIS प्रक्रमों की ${}_rF_s$ हाइपरज्यामितीय श्रेणी इस प्रकार है-

$${}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1, \dots\dots\dots a_r \\ b_1, \dots\dots\dots b_r \end{matrix} ; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots\dots (a_r)_n}{(n\,!)(b_1)_n \dots\dots (b_s)_n} z^n.$$

जहाँ $(a)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k)$

BIS प्रक्रमों की q आधार पर ${}_r\phi_s$ हाइपरज्यामितीय श्रेणी इस प्रकार है-

$${}_r\phi_s\left[\begin{matrix} a_1, \dots\dots\dots a_r \\ b_1, \dots\dots\dots b_r \end{matrix} ; q, z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots\dots, a_r ; q)_n}{(q, b_1, \dots\dots, b_s q)_n} z^n \left[(-1)^n q^{\frac{n}{2}}\right]^{l+s-r}$$

यहाँ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$,

$$f((a_1, a_2, \dots\dots\dots a_r\ q) = (a_1 ; q)_n \dots\dots\dots a_r ; q)_n$$

तथा

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1, & , n = 0 \\ (1-a)(1-aq)\dots,\dots,(1-aq^{n-1}) & , n = 1, 2, \dots, \dots, \\ [(1-aq^{-1})(1-aq^{-2})\dots,\dots,(1-aq^{n})]^{-1} & , n = -1, -2, \dots, \end{cases}$$

4. BIS प्रक्रम का दो विमीय रेडान रूपान्तर

हम फलन $f(x, y)$ पर विचार करेगें जो BIS प्रक्रम को दर्शाता है। रेखा L के साथ $f(x, y) \in R^2$ का प्राचलीकरण (r, θ) द्वारा इस प्रकार किया जा सकता है कि

$$r = x\cos\theta + y\sin\theta$$

मान लें कि इस फलन का दो विमीय रेडान रूपान्तर $f(r, \theta)$ है। तब

$$f(r, \theta) = \int_{R^2} f(x, y)\ \delta(r - x\cos\theta - y\sin\theta)\, dx\, dy \qquad (1)$$

एकविमीय फलन $f(r, \theta)$ को θ कोण पर $f(x, y)$ का प्रोजेक्शन कहा जाता है। BIS प्रक्रम के लिए पश्च प्रोजेक्शन आपरेटर (B) होगा

$$h_B(x, y) = B\, h(r, \zeta) = \int_0^{\pi} h(x\cos\theta + y\sin\theta, \zeta)\, d\theta \qquad (2)$$

तब

$$f(x, y) = B F^{-1}\left[| w | F(r, \theta) \right] \quad (3)$$

जहाँ B = पश्च प्रोजेक्शन आपरेटर है।

समीकरण (3) व्युत्क्रम रेडान रूपान्तर (R) का फिल्टरित पश्च प्रोजेक्शन कार्यान्वयन है। इसका अर्थ है कि हम प्रत्येक प्रोजेक्शन को $|w|$ फिल्टर द्वार फिल्टर करते हैं और तब फिल्टरित प्रोजेक्शनों को पश्च प्रोजेक्ट करते हैं।

5. रेडान व्युत्क्रमण की अ-स्थानीयता

BIS प्रक्रम के लिए रेडान व्युत्क्रमण सूत्र है

$$f(x, y) = R^{-1} f(r, \theta) = B H_r \frac{\delta}{\delta r} f(r, \theta) \quad (4)$$

जहां R = रेडान रूपान्तर

H_r = हिलबर्ट रूपान्तर आपरेटर है जिसे निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं-

$$H_r f(r, \theta) = \frac{1}{\pi} f(r, \theta) \cdot \frac{1}{r} \quad (5)$$

BIS क्रियाविधि का हिलबर्ट रूपान्तर किसी फलन के फूरियर रूपान्तर (F) पर असंतता लागू करता है जिसका औसत मान शून्य नहीं है और उच्चतर व्युत्पन्नों पर असंतताएँ भी मूलबिन्दु पर शून्य नहीं हैं। ऐसा इसलिए है क्योंकि

$$F H f(t) = F[f(t)] \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{i} \sin(w) F(w) \quad (6)$$

6. तरंगिकाएँ (Wavelets)

संकेत $f(t)$ का संतत तरंगिका रूपान्तर $W\Psi(f)(a, b)$ cw

$$W \Psi(f)(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} | a |^{-1/2} f(t) \Psi\left(\frac{t - b}{a}\right) dt \quad (7)$$

जहाँ $a \in R^{+}$ तथा $b \in R^{3}$ एकाकी तरंगिका फलन के $\Psi(t)$ जो मातृ तरंगिका कहलाती है क्रमशः प्रसार तथा स्थानान्तरण हैं। Ψ जटिल संयुग्मता को बताता है। तरंगिकाओं का अत्यन्त महत्वपूर्ण गुण उनकी नियमितता है जिसका अर्थ है तरंगिका फलन की चिक्कणता। मातृ तरंगिका $\Psi(t)$ की नियमितता (R) को इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\gamma} \Psi(t)\, dt = 0 \qquad (8)$$

जहां γ ऐसा पूर्णांक है कि $0 < \gamma < R$.

इस प्रकार R नियमितता युक्त BIS प्रक्रम का मातृ तरंगिका में $\Psi(w)$ के $R-1$ लुप्त होने वाले घूर्ण होते हैं। $\Psi(t)$ फूरियर रूपान्तर में मूलविन्दु पर R कोटि का शून्य होता है क्योंकि

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\gamma} \Psi(t)\, dt = (j)^{\gamma} \frac{a^{\gamma}\Psi(w)}{dw^{\gamma}} right|_{w=0} = 0 \qquad (9)$$

2L लम्बाई की डौबेचीज तरंगिका की नियमितता R = L।

7. बहु-विभेदन विश्लेषण (MRA)

किसी दिए हुए फलन f के लिए हम मापनी J पर निम्नविभेदन संकेत $f^{(j)}$ एवं $d^{(j)}$ निम्न ढंग से प्राप्त करते हैं,

$$f^{(j)}(K) = (h(.) * f^{(j+1)}(2K)) \qquad (10)$$

तथा

$$d^{(j)}(K) = (g(.) * d^{(j+1)}(2K)) \qquad (11)$$

जहाँ एकविमीय संवलन (convolution) को बताता है, h तथा g दो फिल्टर हैं जो MRA से सम्बद्ध हैं। अधिक सूक्ष्म मापनी सन्निकटन तथा विस्तृत गुणांक $f^{(j)}$ एवं $d^{(j)}$ निम्मवत है–

$$f^{(}j+1)(k) = \sum_{n} \tilde{h}\ (2n-k) f^{(j)}(n) + \sum_{n} \tilde{g}\ (2n-k) d^{(j)}(n) \qquad (12)$$

जहां $\tilde{h}$ तथा $\tilde{g}$ को निम्नवत परिभाषित करते हैं –

$$\tilde{h}(n) = h(-n)$$

तथा

$$\tilde{g}(n) = g(-n)$$

8. $\frac{1}{f}$ प्रक्रम

$\frac{1}{f}$ प्रक्रम अ-स्थिर रैंडम प्रक्रम है जिसमें

$S(f) = \frac{\sigma^2}{|f|\gamma}$ शक्ति स्पेक्ट्रल घनत्व (PDS) होता है (13)

जहाँ σ स्थिरांक है, तथा स्पेक्ट्रल घातांक के नाम से जाना जाता है। प्रबल BIS प्रक्रम का आंशिक आयाम (D) है -

$$D = 2.5 - \frac{\gamma}{2} \tag{14}$$

यदि हम गामा का चुनाव इस तरह करें कि $1 < \gamma < 3$, तो $1 < D < 2$. अतःसंकेत का आंशिक आयाम पूर्णांक नहीं है अपितु असली संख्या है जो (1, 2) में स्थित है और संकेत स्वयं उसी तरह का है।

9. प्रबल सागरीय BIS प्रक्रमों के लिए सेलबर्ग का समाकल

हमें पता है कि समुद्र में BIS प्रक्रम नवीन उन्नत संयंत्रों के विकसित हो जाने से प्रबल से प्रबलतर बनते जा रहे हैं। इसलिए समय $t = (t_1, \ldots, t_n) \in R^n$ में सेलबर्ग के समाकल पर विचार करना आवश्यक है।

माना कि वैंडरमांट सारणिक $D(t)$ है तब

$$D(t) = \sum_{i<j}^{n} \left(t_i - t_j\right)$$

$$W_{x,y}(t) = \prod_{j=1}^{n} t_j^{x-1} \left(1 - t_j\right)^{y-1}$$

जहाँ $0 < t_j < 1$

$$j = 1, \ldots, n$$

$$dt = dt_1, \ldots, dt_n$$

तब BIS क्रियाविधि के लिए सेलबर्ग का समाकल है -

$$\int_{(0,1)^n} |D(t)|^{2x} W_{x,y}(t)\, dt$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(x + (n-j)z)\,\Gamma(y + (n-j)z)\,\Gamma(jz + 1)}{\Gamma(x + y + (2n - j - 1)\,\Gamma(z + 1)},$$

यदि $R_e(x) > 0,$

$$R_e(y) > 0,$$

तथा

$$R_e(z) > -\left[\frac{1}{n}, \frac{R_e(x)}{n-1}, \frac{R_e(y)}{n-1}\right].$$

विवेचना

10.1 हैमिल्टन का गाइया सिद्धान्त : क्वांटम बिसोलाजी (bisology) तथा प्रयो ग करके दे खे गये BIS प्रक्रमों की परिपुष्टि हैमिल्टन की गाइआ सिद्धान्त से होती है (New Scientist, 30 मई 1998), पृष्ठ 28-33.

सूक्ष्मजीव मौसम के निर्माता हैं। समुद्री प्लैंकट न बादलों को जन्म देते हैं। आक्सफोर्ड विश्वविद्यालय के हैमिल्टन सामाजिक तथा यौन विकास विषयक अपने शोधकार्य के लिए विख्यात हैं। वे रिचार्ड डाकिन्स से बहुत काल पूर्व स्वार्थी जीनों के विषय में सोच रहे थे। हैमिल्टन तथा लेंटन ने इसकी व्याख्या की है कि सूक्ष्मजीव क्योंकर बादलों को उत्पन्न करते हैं। उन्होने गाइया (Gaia) के लिए पहली बार विश्वसनीय क्रियाविधि सूत्रबद्ध की है। गाइया सिद्धान्त के अनुसार हमारी पृथ्वी एक महाजीव (super-organism) की तरह कार्य करती है और इसकी सारी जैव तथा भौतिक प्रणालियाँ इसे स्वस्थ बनाये रखने में सहयोग करता है।

10.2 अन्तर्राष्ट्रीय अन्तरिक्ष स्टेशन तथा BIS प्रभाव : क्वांटम बिसोलाजी (bisology) के अध्ययन में अन्तर्राष्ट्रीय अन्तरिक्ष स्टेशन नवीन वातायन खोलने जा रहे हैं। क्वांटम बिसोलाजी के अनुसार BIS प्रभाव के स्थानीय परिणाम होते हैं और ऐसे प्रबल प्रभाव की उपेक्षा नहीं की जा सकती जब चक्रवातों, टारनेडों तथा तूफानों के कारणों का मूल्यांकन किया जा रहा हो।

इस प्रभाव से सम्बन्धित अधिकांश भविष्यवाणियों की पुष्टि निर्माणाधीन अन्तर्राष्ट्रीय अन्तरिक्ष स्टेशन पर प्रयोग करके की जा सकती है। मनुष्य स्वयं ही अपनी जलवायु को नष्ट करने के लिए जिम्मेदार है क्योंकि वह नित्य ही करोड़ों समुद्री जीवों के पकड़ता रहता है। ये समुद्री प्राणी वायुमण्डल के गतिशील सन्तुलन को बनाये रखने के लिए जिम्मेदार हैं।

11. निष्कर्ष

मत्स्य, झींगा तथा अन्य समुद्री जीवों का अत्यधिक मात्रा में शिकार करके मनुष्य जल के स्थायित्व

को बिगाड़ता है और इन परिवर्तनों को सही सही ढंग से अन्तर्राष्ट्रीय अन्तरिक्ष स्टेशन द्वारा मापा जा सकता है। तूफान, चक्रवात तथा टारनेडो समुद्रों के तल पर मनुष्य द्वारा उत्पन्न किये गये उत्पात हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण, दिल्ली विश्वविद्यालय के भौतिकी तथा ताराभौतिकी विभाग के अध्यक्ष एवं कुलपति दिल्ली विश्वविद्यालय के आभारी हैं जिन्होंने शोधकार्य के लिए सुविधाएँ प्रदान कीं।

निर्देश

1. लोरेंग, ई०. एन०. : "Empirical Orthogonal Functions and Statistical Weather Prediction." MIT, Dept. of Meteorology, Science Report 1, 1956 पृ ष्ठ49.

2. सल्ट्जमैन, बी., : Adv. Geophysics, 1983, 25, 173-233.

3. वाकर, जी. टी. तथा ब्लिस, ई. डब्लू. : Mem. R. Meteor. Soc. 1932, 4, 53-84.

4. आर्या, एस. पी. : Introduction to Micrometeorology, Academic, N.Y. 1988 पृष्ठ 307.

5. चार्नी, जे. जी. J. Meteor., 1947, 4, 135-162.

6. बुड्यको, : Tellus, 1969, 21, 611-619.

7. बुड्यको, एम. आई. : Reidel, Dordrecht, 1986 पृष्ठ 423.

8. क्राली, जी. जे. : Rev. Geophys Space Phys. 1983, 21, 828-877.

9. बर्जर, ए. एल: J. Atmos. Sci. 1978, 35, 2362-2367.

10. हैसेलमान, के. : Tellus, 1976, 28, 473-485.

11. एडेम, जे. : Mon. Weather Rev., 1964, 92, 91-103.

12. ईडी, ई. टी. : Tellus, 1949, 1, 33-52.

13. स्टार, वी. पी. : J. Meteor. 1948, 5, 39-43.

14. ब्रयान, के. तथा लेविस, एल जे. : J. Geophys. Res., 1979, 84, 2503-1517.

15. ब्राइसन, आर. ए. : In the Environmental Future (N. Poluin, editor) MacMillan, London, 1972 पृष्ठ 134-174.

16. डाइसन, एफ. जे. : Energy, 1977, 2, 287-291.

17. मनाबे , एस. :Adv. Geophys., 1983, 25, 173-233.

18. सुतेरा, ए. : Q. J. R. Meteor. Soc., 1981, 107, 137-151.

19. इब्राहीम, एम. एस. एम. तथा बजाज, एम. एम. : Asian Journal of Physics, 1995, 4(3)

20. बजाज, एम. एम. तथा इब्राहीम, एम. एस. एम. 4th International Congress of the International Pain Association, Telaviv, Israel, Sep. 1994.

21. बजाज, एम. एम. तथा इब्राहीम, एम. एस. एम. : XXVII Anual convention of the Indian College of Allergy and Applied Immunology (AICON-94)अप्रैल 1994 पृष्ठ 33.

22. विल्ड, पी. तथा क्रैम्पिन, एस. : Geophys. J. Int., 1991, 107.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्यूलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक